Cours « Conception et analyse d'algorithmes »
TD no 3 – flots et couplages
31 janvier 2007

1. Plan d'évacuation.

On considère un graphe symétrique $G = (X, E)$ ayant n sommets, et deux sous-ensembles Y et Z de X (non nécessairement disjoints) ; les éléments de Y sont les places et les éléments de Z les issues.

Un plan d'évacuation est un ensemble de chemins dans le graphe tels que deux d'entre eux n'ont pas de sommet commun et tels que chacun des chemins mène d'une place à une issue. Déterminer un plan d'évacuation optimal consiste à trouver un plan d'évacuation contenant le nombre maximum de chemins.

Un problème de flot avec contraintes sur les sommets est un problème de flot classique auquel on ajoute des contraintes supplémentaires définies par un ensemble de nombres s_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, où chaque s_i est associé à un sommet x_i de X, les contraintes exprimant que pour $i = 1, \ldots, n$, la somme des flots entrants en x_i doit être inférieure ou égale à s_i.

a. Montrer que la détermination d'un plan d'évacuation optimal peut se ramener à un problème de flot avec contraintes sur les sommets.

b. Montrer que cette nouvelle contrainte peut se traduire par des contraintes portant uniquement sur des capacités d'arcs pour un autre graphe dont on précisera la construction.

c. En déduire un algorithme de recherche d'un plan d'évacuation optimal.

2. Couplages et ensembles couvrants.

Dans un graphe symétrique (X, E), on rappelle qu'un couplage est un sous-ensemble F de E tel que deux arêtes de F n'ont pas d'extrémité commune. Un ensemble couvrant est un sous ensemble C de X tel que toute arête $\{x, y\}$ a au moins une de ses extrémités dans C.

On se propose de démontrer ici le théorème de König, qui affirme que pour un graphe biparti le nombre d'arêtes d'un couplage maximal est égal au nombre minimal de sommets d'un ensemble couvrant. Rappelons qu'un graphe $G = (X, E)$ est biparti s'il existe une partition $X = Y \cup Z$ telle que chaque arête a un sommet dans Y et l'autre dans Z.

a. Transformer G en un réseau de transport G' tel que le flot maximal de G' détermine un couplage maximal dans G. Une coupe de G' est alors déterminée par un sous-ensemble Y' de Y et un sous-ensemble Z' de Z.

b. Montrer que toute coupe de G' détermine un ensemble couvrant de G dont le nombre de sommets est inférieur ou égal à la capacité de la coupe.

c. Réciproquement montrer que tout ensemble couvrant $Y_1 \cup Z_1$ de G détermine une coupe dont la capacité est égale à $|Y_1| + |Z_1|$.

d. Déduire le théorème de König des questions qui précèdent.

e. Au cours du bal annuel il y a n femmes et n hommes, chaque femme choisit $k \geq 1$ cavaliers possibles pour la soirée.

Leurs choix sont tels que chaque homme a été choisi exactement k fois. Montrer en utilisant le théorème de König que l'on peut répartir les cavaliers de façon telle que toutes les personnes puissent danser.

3. Recouvrement par des chemins

Un recouvrement d'un graphe orienté $G = (S, A)$ est un ensemble P de chemins sans sommet commun tel que tout sommet de S soit inclus dans exactement un chemin de P. Les chemins peuvent commencer et se terminer n'importe où, et éventuellement ne contenir qu'un sommet. Un recouvrement minimal est un recouvrement par chemins contenant le moins de chemins possibles.

a. Donner un algorithme efficace permettant de trouver un recouvrement minimal par chemins d'un graphe orienté sans circuit $G = (S, A)$, avec $S = \{1, \ldots, n\}$. On pourra considérer le graphe $G' = (S', A')$ avec

$$\begin{aligned} S' &= \{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{y_0, \ldots, y_n\} \\ A' &= \{(x_0, x_i), i \in S\} \cup \{(y_i, y_0), i \in S\} \cup \{(x_i, y_j), (i, j) \in A\} \end{aligned}$$

b. L'algorithme fonctionne-t-il pour les graphes orientés contenant des circuits ? Pourquoi ?

c. Déduire de ce qui précède et du théorème de König (voir exercice 2) le résultat suivant (théorème de Dilworth) :

Dans un ensemble partiellement ordonné le nombre minimum de chaînes (une chaîne est un ensemble constitué d'éléments deux à deux comparables) qui recouvrent l'ensemble est égal au nombre maximum d'éléments deux à deux incomparables.

4. Résistance aux pannes.

Un paramètre représentant la résistance aux pannes d'un graphe non orienté G est le nombre minimum d'arêtes à retirer de G pour le déconnecter. Calculer ce nombre en utilisant des algorithmes de flot.

5. Car pooling.

Un groupe de n personnes $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ partagent un minicar pour aller travailler pendant m jours. Le jour i, un sous-ensemble S_i de P formé des personnes allant travailler utilisent ce véhicule. Le conducteur ce jour-là sera un élément de S_i. Étant donnés $S_1, \ldots S_m$, le problème est de choisir pour chaque j le conducteur du jour j de façon que la répartition soit *équitable*, c'est-à-dire qu'une personne i ne conduise pas plus de $\lceil \sum_{j:i \in S_j} \frac{1}{|S_j|} \rceil$ jours au total. Par exemple, s'il y a quatre personnes et deux jours $S_1 = S_2 = S_3 = \{p_1, p_2\}$ et $S_4 = S_5 = S_6 = \{p_1, p_3, p_4\}$, la personne p_1 doit conduire au maximum $\lceil 3/2 + 3/3 \rceil = 3$ des six jours, la personne p_2 au maximum $\lceil 3/2 \rceil = 2$ et les autres au maximum 1 jour.

Modéliser ce problème comme un problème de flot maximum.

Montrer qu'il existe toujours une répartition équitable.