Corrigé de la pc 9

1. Polynômes de coupure, de Tutte On énumère les coupures : celle pour laquelle X_1 est vide donne une taille 0 ; celles pour laquelle X_1 contient un sommet sont toutes de taille 3, et sont au nombre de 4 ; celles pour lesquelles X_1 contient deux sommets sont, à symétrie près, au nombre de 3 et contiennent 4 arêtes. Le polynôme de coupure est donc $1 + 4u^3 + 3u^4$. Il s'ensuit que la fonction de partition vaut $Z(\theta) = 2B_G(\theta^2)/\theta^6 = 2/\theta^6 + 8 + 3\theta^2$.

En ce qui concerne le polynôme de Tutte, un calcul (fastidieux mais pas difficile) conduit à $x^3 + x^2 + x + y + (x+y)^2 + y^3 + y^2 + y + x$.

2. Polynôme chromatique

i. Dans le cas d'un arbre, on choisit la couleur de la racine parmi k ; pour chaque noeud interne ultérieur, on peut choisir sa couleur arbitrairement parmi les couleurs qui ne sont pas celles de son père ; on a donc $k-1$ choix en chaque noeud distinct de la racine, d'où un total de $k(k-1)^{n-1}$.

ii. Il y a plusieurs façons de faire pour C_n. La première consiste à traiter par anticipation la question **iii**, pour arriver à la récurrence $P_{C_n} = -P_{C_{n-1}} + k(k-1)^{n-2}$. La seconde consiste à raisonner par récurrence : on distingue deux types de colorations de C_n. Dans la première, les sommets 1 et $n-1$ ont couleur différentes ; d'une telle coloration, on peut déduire une coloration de C_{n-1} en supprimant le sommet n ; inversement, d'une coloration de C_{n-1}, on déduit $k-2$ colorations de ce type (le choix de la couleur du sommet n s'effectue parmi $k-2$).

Dans le second type, les sommets 1 et $n-1$ ont même couleur. Dans ce cas, la couleur du sommet $n-2$ est distincte de cette couleur, et on peut déduire une coloration valide de C_{n-2} ; inversement, de toute coloration de C_{n-2}, on déduit $k-1$ colorations telles que les couleurs de 1 et de $n-1$ coïncident (on a cette fois $k-1$ choix pour la couleur de $n-1$). Par suite, on trouve

$$P_{C_n}(k) = (k-2)P_{C_{n-1}}(k) + (k-1)P_{C_{n-2}}(k),$$

relation qui a un sens dès que $n \geq 5$.

L'équation caractéristique correspondant à cette récurrence a les deux racines $(k-1)$ et (-1) ; on trouve donc $P_{C_n}(k) = A(k-1)^n + B(-1)^n$, pour des A et B biens choisis.

Mais $P_{C_3} = k(k-1)(k-2)$; pour P_{C_4}, la couleur de 1 est choisie parmi k et celle de 2 parmi $k-1$; si 3 est de la couleur de 1, on trouve $k(k-1)^2$ possibilités ; sinon, on trouve $k(k-1)(k-2)^2$ possibilités, soit un total de $k(k-1)(k^2-3k+3)$.

En additionnant l'identité définissant A et B pour $n = 3, 4$ il vient $Ak(k-1)^3 = k(k-1)(k^2-2k+1)$, soit $A = 1$, et $-B = -(k-1)^3 + P_{C_3} = 1-k$, d'où $B = k-1$.

Pour le cas du graphe complet K_n, il faut choisir la couleur de chaque sommet parmi k ; cela conduit à $P_{K_n}(k) = A_k^n = k(k-1)\dots(k-n+1)$.

iii. Soit a l'arête étudiée. Supposons que a n'est pas un isthme ; toute coloration du graphe G fournit naturellement une coloration du graphe G' dans lequel l'arête a a été supprimée. Inversement, étant donné une coloration de G', on obtient une coloration de G dès lors que les couleurs des deux extrémités de A sont distinctes dans cette coloration ; mais dans le cas contraire, on obtient, en identifiant les deux sommets, une coloration du graphe G'' ; on voit donc que $P_G = P_{G'} - P_{G''}$.

Dans le cas où l'arête est un isthme, notons G_1 et G_2 les deux composantes connexes obtenues par suppression de l'arête $a = (x, y)$, avec $x \in G_1$ et $y \in G_2$.

Une coloration de G' peut se voir comme une coloration de G_1 et une coloration de G_2 dans lesquelles les couleurs de x et de y coïncident.

Inversement, supposons donnée une coloration de G_1 et de G_2 dans laquelle les couleurs de x et de y coïncident. À chacun de ces couples de colorations, on peut associer $k-1$ couples de colorations dans lesquels les couleurs de x et de y sont distinctes, qui fournissent une coloration du graphe de départ. Par suite, $P_G = (k-1)P_{G''}$.

iv. Il suffit de vérifier que la suite donnée vérifie la même récurrence que celle établie en 3, et que l'initialisation (graphe à un sommet, dont le polynôme chromatique vaut k) est la même ; cela résulte de calculs faciles.

On peut alors retrouver le polynôme chromatique de C_n en remarquant que son polynôme de Tutte est $y + x + \ldots x^{n-1}$.

3. k-flots

i) On observe que pour un sommet de degré entrant et sortant égal à 1 la condition de nullité du flot modulo k entraine que les 2 arêtes portent le même flot.

ii) Soit G' le graphe orienté obtenu à partir de G en retournant l'arête a. A chaque flot f de G on associe un flot de G' en posant

$$f'(e) = \begin{cases} k - f(e) & \text{si} e = a, \\ f(e) & \text{sinon.} \end{cases}$$

iii) La preuve est identique à celle de l'exercice 2, en échangeant le rôle de la contraction et de la suppression d'arêtes.

4. MAXCUT

i) On suppose qu'un sommet a donné de V_1 a strictement plus de voisins dans V_2 que dans $V_3 \cup V_4 = X_2$. Comme $V_2 \subset X_1$, cela implique que a a plus de voisins dans X_1 que dans X_2. Par ailleurs, si l'on change X_1 en $X_1 - \{a\}$ et X_2 en $X_2 \cup \{a\}$, la valeur de la coupure est augmentée du nombre de voisins de a dans X_1 moins le nombre de voisins de a dans X_2, qui est par hypothèse strictement positif, ce qui contredit le fait que X_1, X_2 soit une partition renvoyée par l'algorithme.

Par suite, on a bien $m_{1,2} \leq m_{1,3} + m_{1,4}$. De façon symétrique, $m_{3,4} \leq m_{3,1} + m_{3,2}$. En ajoutant ces deux inégalités et en ajoutant $m_{1,4} + m_{2,3}$ aux deux membres il vient $m_{1,2} + m_{3,4} + m_{1,4} + m_{2,3} \leq 2(m_{1,3} + m_{1,4} + m_{2,3})$ (comme le graphe est symétrique $m_{i,j} = m_{j,i}$), d'où l'inégalité demandée en ajoutant la quantité positive $2m_{2,4}$ au membre de droite.

ii) La coupure donnée par l'algorithme est constituée des arêtes de V_1 et V_2 vers V_3 et V_4. La taille de cette coupure est. $m_{1,3} + m_{1,4} + m_{2,3} + m_{2,4}$. La coupure optimale est constituée des arêtes de V_1 et V_3 vers V_2 et V_4, sa taille est $m_{1,2}+m_{3,4}+m_{1,4}+m_{2,3}$. Le résultat demandé est alors une conséquence immédiate de l'inégalité prouvée à la question i).

iii) Sans difficulté, laissé au lecteur.

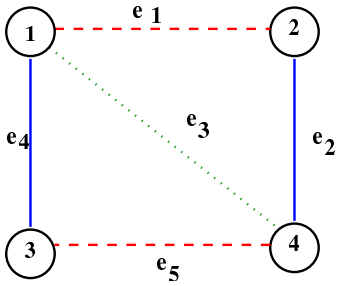
iv) On construit la partie X_1 de la façon suivante : elle est constituée des clauses satisfaites et des variables dont la valeur dans l'affectation est 0 ; X_2 est le complémentaire de X_1. Si k clauses sont satisfaites, alors au moins k variables sont à 1 dans l'affectation, et les sommets correspondants sont donc dans X_2. Une des deux arêtes (c_{2i-1}, t_i) ou (c_{2i}, z_i) est donc dans

la coupure. Mais si la seconde variable est à 1 dans l'affectation, ces deux arêtes sont dans la coupure ; si la seconde variable est à 0, l'arête (t_i, z_i) est dans la coupure. Cela montre que deux des trois arêtes associées à chaque clause satisfaite sont dans la coupure, et donc que la coupure est de taille au moins égale à $2k$.

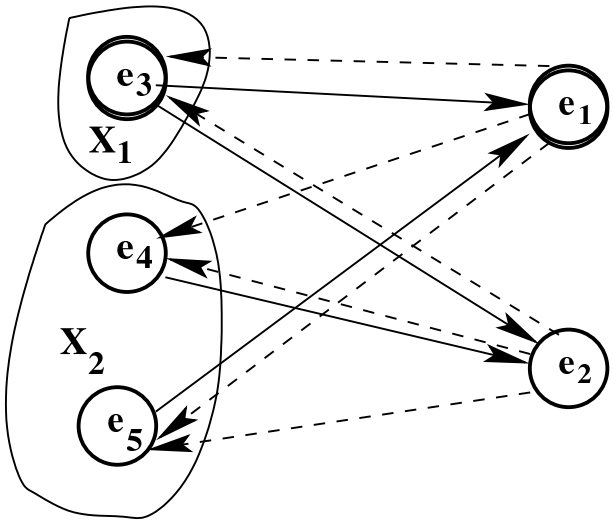
v) Le fait que *MAX-2SAT* se réduise polynomialement à *MAXCUT-COMP* est une conséquence immédiate de la question précédente (observer que le nombre d'arêtes du graphe comme le nombre de sommets sont linéaires en le nombre de clauses) ; par suite *MAX-2SAT* se réduit polynomialement à *MAXCUT* qui est donc NP-complet.

5. Arbres recouvrants

1. Sur l'exemple ci-dessous, l'algorithme glouton s'il considère les arêtes par indices croissants donne l'ensemble $\{e_1, e_2\}$ et termine avec cet ensemble. Toutefois il existe un arbre recouvrant avec trois arêtes de couleurs toutes distinctes par exemple : $\{e_1, e_3, e_4\}$

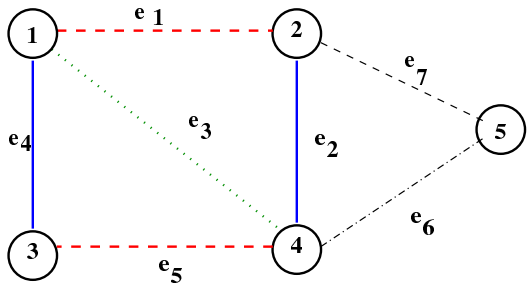


2. Le graphe G_T correspondant à l'exemple donné comme réponse à la Question 1 est :



3. Si T est obtenu par l'algorithme glouton, alors il n'existe pas d'arête qui a une couleur différente de celles de T et qui ne forme pas de cycle avec T, car elle aurait été ajoutée à T. Ainsi $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

D'autre part il peut très bien exister une arête qui forme un cycle avec T et qui soit de même couleur qu'une des arêtes de T, par exemple pour le graphe suivant :



pour lequel les couleurs sont :

$$E_1 = \{e_1, e_5, e_7\}, \quad E_2 = \{e_2, e_4\}, \quad E_3 = \{e_3\}, E_4 = \{e_6\}$$

Pour ce graphe l'algorithme glouton construit $T = \{e_1, e_2, e_6\}$, on a alors $X = \{e_3, e_4, e_5, e_7\}$, $X_1 = \{e_3\}$ et $X_2 = \{e_4, e_5\}$.

4. Pour l'exemple considéré les chemins qui mènent de X_2 à X_1 de longueur 2 composés de 3 sommets permettent d'obtenir un ensemble satisfaisant $(T_1), (T_2)$ et ayant plus d'arêtes que T. En effet pour un tel chemin par exemple e_4, e_2, e_3, on ajoute e_4, e_3 et on supprime e_2 à T, cela revient à faire la différence symétrique entre T et le chemin trouvé, (de manière analogue aux algorithmes de couplage maximal du cours). On obtient dans ce cas e_1, e_3, e_4. De la même façon pour le chemin e_5, e_1, e_3 on obtient e_2, e_3, e_5 qui est aussi un arbre recouvrant aux arêtes de toutes les couleurs.

En fait on peu démontrer que la construction suivante répond à la question dans le cas général (mais cela n'était pas demandé dans ce problème !). Tout chemin de G_T qui joint un sommet de X_2 à un sommet de X_1 et qui est deplus de longueur minimale parmi ces chemins, donne par différence symétrique avec T un ensemble satisfaisant à $(T_1), (T_2)$ ayant plus d'éléments que T.

5. Les sous-ensembles satisfaisant $(T_1), (T_2)$ ne forment pas un matroïde. Notre exemple donne deux ensembles $F = \{e_1, e_2\}$ et $G = \{e_1, e_3, e_4\}$ tel que tout élément de $G - F$ ajouté à F ne satisfait pas (T_1) ou ne satisfait pas (T_2).

Par contre les ensembles qui satisfont (T_1) forment un matroïde comme cela a été vu en cours. Ceux qui satisfont (T_2) aussi car si on a deux sous-ensembles d'arêtes F et G contenant chacun des arêtes toutes de couleurs différentes et si G contient plus d'élements que F, alors on peut trouver dans G une arête de couleur différente de toutes celles de F, cette arête ajoutée à F donne un ensemble qui satisfait (T_2). Ainsi on a bien l'intersection de deux matroïdes.