Corrigé de la PC 5

14 février 2007

1. $\mathcal{NP}$ complétude de MIN-COUPE-CIRCUIT

i. Version de décision du problème : La donnée est un graphe orienté $G = (X, A)$ et un entier k il faut déterminer s'il existe un ensemble C composé de k arcs tel que $(X, A \setminus C)$ est sans circuit.

Ce problème est dans la classe NP car à partir d'un sous-ensemble C de A on calcule en temps polynomial une représentation du graphe $(X, A \setminus C)$ et on détermine par un parcours en profondeur si ce graphe est sans circuit.

ii. Soit C' l'ensemble obtenu à partir de C en remplaçant tous les arcs de la forme (x_i^1, x_j^0) par (x_i^0, x_i^1). Si $(X, A \setminus C')$ admet un circuit alors il passe néssairement par un arc de C qui n'est pas dans C' puisque $(X, A \setminus C)$ est sans circuit. Ce ne peut être qu'un arc de la forme (x_i^1, x_j^0), l'arc qui prècède (x_i^1, x_j^0) dans ce circuit est nécessairement (x_i^0, x_i^1), or par construction de C' il n'est pas dans $(X, A \setminus C')$; cette contradiction permet de prouver que $(X, A \setminus C')$ est bien sans circuit.

iii. On va montrer que le problème *RECOUVREMENT par SOMMETS* se réduit à la version de décision de *MIN-COUPE-CIRCUIT*. La donnée de *RECOUVREMENT par SOMMETS* est un graphe $G = (X, E)$ et un entier k, il s'agit alors de vérifier s'il existe un sous-ensemble Y de X ayant k éléments et tel que toute arête de E a au moins une extremité dans Y. Construisons le graphe $G' = (X', A)$ comme suggéré, il nous faut montrer que G admet un recouvrement par k sommets si et seulement si G' admet un coupe-circuit de taille k. Pour cela on vérifie que $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ est un recouvrement par sommets de G si et seulement si $C = \{(x_1^0, x_1^1), (x_2^0, x_2^1), \dots, (x_k^0, x_k^1)\}$ est un coupe-circuit de G' :

— Soit Y= $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ un recouvrement par sommets de G ; un circuit de G' passe par un arc (x^1, y^0) donc par (x^0, x^1) et (y^0, y^1) ; il correspond à une arête $e = \{x, y\}$ de G. Au moins une des extremités de e est dans Y, par exemple x, ainsi (x^0, x^1) est dans C. Tout circuit de G' passe par un arc de C, C est un coupe-circuit

— Réciproquement si C est un coupe-circuit de taille k de G' on peut supposer qu'il est inclus dans A' par **2.**, ainsi $C = \{(x_1^0, x_1^1), (x_2^0, x_2^1), \dots, (x_k^0, x_k^1)\}$. L'ensemble $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ est un recouvrement par sommets de G car pour toute arête $\{x, y\}$ de G, (x^0, x^1), (x^1, y^0), (y^0, y^1), (y^1, x^0) est un circuit de G' qui doit passer par un arc de C qui est soit (x^0, x^1) soit (y^0, y^1), ainsi x ou y est alors dans Y.

2. HITTING-SET

Soit $(G = (V, E), k)$ une instance de COUVRANT-MIN (le graphe G est non orienté). Posons $S = X$, $C = E$. La question HITTING-SET(S, C, k) est vraie si et seulement s'il existe $S' \subset S$, $|S'| \leq k$, tel que $\forall x \in E, x = \{u, v\}$ on a $u \in S'$ ou $v \in S'$, ce qui est exactement COUVRANT-MIN(G, k). On a donc réduit COUVRANT-MIN à HITTING-SET. Comme ce dernier est manifestement dans NP (la donnée de S' constitue un certificat de taille $|S'| \leq |S|$, donc polynomiale, qui se vérifie en énumérant les ensembles de C et en parcourant S' pour chaque élément, soit en temps $O(\text{taille}(C)|S'|)$), il est donc bien $\mathcal{NP}$-complet.

3. ISO-SOUS-GRAPHE

Soit $(G = (V, E), k)$ une instance de STABLE (le graphe G est non orienté). Construisons le graphe $H = (\{1, \ldots, k\}, \emptyset)$. La question ISO-SOUS-GRAPHE(H, G) revient à demander s'il existe $\phi : \{1, \ldots, k\} \to V$ tel que pour tout k $(\phi(u), \phi(v)) \notin E$, c'est-à-dire à STABLE$(G, k)$. Comme l'isomorphisme de sous-graphe est manifestement dans NP (la donnée du graphe de ϕ fournit un certificat de taille $O(|H|)$, vérifiable en temps $O(|H||E|)$)), et qu'on lui a réduit STABLE, ce problème est donc $\mathcal{NP}$-complet.

4. Sous-ensemble acyclique maximal

On considère les 2 sous-ensembles formés pour l'un des arêtes croissantes (i, j) avec $i < j$ et pour l'autre des arêtes decroissantes. L'un de ces 2 contient au moins la moitié des arêtes et ils sont tout 2 acycliques.

5. Le problème du voyageur de commerce

(i) Rappelons que l'arbre couvrant minimal est construit en triant les arêtes par poids croissant, et en ajoutant, dans l'ordre, les arêtes qui peuvent l'être sans créer un cycle.

Si l'on suppose que la recherche d'un cycle éventuel se fait en utilisant un Union-Find pour lequel la recherche est en $O(\log |A|)$ et l'union en temps $O(1)$, le test d'une arête coûte alors un temps total $O(\log n)$, soit un temps total pour la seconde phase de l'algorithme en $O(n^2 \log n)$, qui est du même ordre que le coût du tri.

(ii) Si l'on enlève une arête d'une tournée optimale, on obtient un arbre (puisqu'on enlève le cycle présent) couvrant, de coût inférieur au coût de la tournée, et supérieur au coût d'un arbre recouvrant minimal. Il s'ensuit que $c(H^*) \geq c(T)$.

(iii) Le parcours complet revient à décrire exactement deux fois chacune des arêtes rencontrées dans le parcours en profondeur. Il s'ensuit facilement que $c(W) = 2c(T) \leq 2c(H^*)$.

Si l'on considère le parcours complet et que l'on supprime toutes les occurrences de chaque sommet, sauf la première, on obtient exactement le parcours en profondeur de l'arbre. Cette suppression revient à remplacer le chemin $a \to b \to c$ par $a \to c$, et d'après l'inégalité triangulaire, ne rallonge donc pas la tournée. Il s'ensuit que $c(H) \leq c(W) \leq 2c(H^*)$.

(iv) Le résultat obtenu en **(iii)** montre que l'on dispose d'un algorithme d'approximation à un facteur 2 pour le problème du voyageur de commerce avec inégalité triangulaire.

(v) Considérons le graphe à n sommets numérotés de 1 à n, et dont le poids des arêtes est donné par :

- $w(1, i) = 1$ pour tout $i \geq 2$;
- $w(i, i + 1) = 2$ pour tout $2 \leq i \leq n - 1$;
- $w(i, j) = 1 + \eta$ sinon.

L'arbre couvrant minimal est alors constitué des arêtes $(1, i)$ pour tout i. Le chemin obtenu consiste alors, si l'on suppose que le parcours en profondeur énumère les sous-arbres par racine d'étiquette croissante, à parcourir les sommets dans l'ordre de leur numéro ; le coût total est alors $1 + 2(n - 2) + 1 = 2n - 2$.

Le parcours $1, 2, 4, 6, \ldots, 2\lfloor n/2 \rfloor 3, 5, 7, \ldots 2\lceil n/2 \rceil - 1, 1$ est quant à lui de longueur $2 + (n - 2)(1 + \eta) = n + (n - 2)\eta$. Le facteur d'approximation vaut donc $2 - (2 + 2(n - 2)\eta)/(n + (n - 2)\eta)$, ce qui, en choisissant bien η, peut être rendu arbitrairement proche de 2.