Corrigé du TD 3

31 janvier 2007

1. a. Il suffit d'ajouter au graphe G une source, à laquelle on relie toutes les places par des arêtes de capacité 1, et un puits, auquel on relie toutes les issues, de capacité 1. On attribue également à chaque arête du graphe une capacité de 1. Il faut cependant ajouter, pour éviter que deux sommets aient un sommet commun, une contrainte au sommet disant que le flot entrant est au plus 1.

L'application d'un des algorithmes de flot vus dans le cours fournit un flot maximal à valeurs dans $\{0, 1\}$. À chaque arête traversée par un flot de capacité 1 on associe une arête du plan d'évacuation. La contrainte sur les sommets assure que les différents chemins sont sommet-disjoints : au plus une arête entrant dans un sommet peut être saturée, puisque le flot est à valeurs dans $\{0, 1\}$. Enfin, la conservation du flot en chaque sommet montre que chaque arête appartient à un sommet allant d'une place à une issue. Tout flot à valeurs $\{0, 1\}$ traversant le graphe fournit donc un plan d'évacuation.

Inversement, partant d'un plan d'évacuation, on sature toutes les arêtes des chemins du plan d'évacuation, ainsi que l'arête allant de la source à la place commençant le chemin et l'arête allant de l'issue au puits. Chaque chemin mène d'une place à une issue ; la conservation du flot entre la source et le puits montre qu'on construit bien un chemin allant d'une place à une issue, et les contraintes sur les sommets sont assurées par le fait que les chemins sont sommet-disjoints.

On a donc bien réduit la recherche du plan d'évacuation à la recherche d'un flot entier dans le graphe construit.

b. On construit un nouveau graphe en remplaçant tout sommet distinct de la source et du puits par deux sommets reliés par un arc de capacité 1, l'un où rentrent les arcs entrants, l'autre dont sortent les arcs sortants. Cette construction limite automatiquement le flot entrant en le sommet à une valeur de 1.

c. Il suffit alors d'appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson au graphe ainsi construit. Le nombre d'arêtes de ce graphe est $O(m + n)$, le nombre de sommets $O(n)$. La complexité est $O((m + n)\Phi)$, où Φ est la valeur du flot maximal, ici $O(n)$ (puisqu'une unité de flot au plus va de chaque arête vers chaque place). La complexité totale est donc $O((m + n)n)$. À noter qu'Edmonds-Karp donnerait $O(n(m + n)^2)$, qui est moins bon dans ce cas.

2. a. C'est une construction classique : on oriente les arêtes de Y vers Z, on leur donne une capacité unitaire, et on ajoute une source, avec une arête de capacité unitaire vers chaque sommet de Y, et un puits, avec une arête de capacité unitaire depuis chaque sommet de Z. À un couplage $C \subset E$ correspond un flot en faisant circuler un flot unitaire de s vers chaque sommet de Y qui est origine d'une arête de C, un flot unitaire dans chaque arête de C, et un flot unitaire de l'extrémité de chaque arête de C vers le puits. Il est facile de voir que ce flot est de capacité $\#C$. Inversement, tout flot entier (et, le graphe étant à capacités entières, il existe un flot maximal entier donné par l'algorithme de Ford-Fulkerson) définit un ensemble d'arêtes saturées dont on vérifie aisément qu'il constitue un couplage. Flot maximal entier et couplage maximal sont donc équivalents.

b. Soit $C = \{s\} \cup Y' \cup Z'$ une coupe de G. La capacité de la coupe C est le nombre d'arêtes sortant de C, i.e. le nombre de sommets de $Y - Y'$ (arêtes $s \rightarrow Y - Y'$) plus le nombre d'arêtes de Y' vers un sommet de $Z - Z'$, plus le nombre d'arêtes de Z' vers t. On peut construire un ensemble couvrant en prenant $(Y - Y') \cup Z'$, plus un sous-ensemble des sommets de $Y' \cup Z - Z'$ de sorte qu'il y ait au moins un sommet par arête ; comme un sommet peut servir pour deux arêtes, il suffit d'ajouter un nombre de sommets $\leq [Y', Z - Z']$, et le cardinal de l'ensemble couvrant est donc $\leq \#(Y - Y') + \#Z' + [Y', Z - Z']$, soit exactement la capacité de la coupe.

c. Si $Y_1 \cup Z_1$ est un ensemble couvrant, on peut considérer la coupe constituée de $\{s\} \cup Y - Y_1 \cup Z_1$. Sa capacité est égale à $\#Y_1$ (arêtes de s vers Y), plus le nombre d'arêtes de $Y - Y_1$ vers $Z - Z_1$, plus $\#Z_1$ (arêtes de Z vers t). Par hypothèse (ensemble couvrant), il n'y a pas d'arêtes de $Y - Y_1$ vers $Z - Z_1$; la capacité de la coupe est donc le cardinal de l'ensemble couvrant.

d. Soit C une coupe minimale et E un ensemble couvrant de taille minimale.

De b), on déduit l'existence d'un ensemble couvrant E' de taille inférieure ou égale à la capacité de C. Il s'ensuit que l'ensemble couvrant minimal E est de taille inférieure ou égale à la capacité de C.

Inversement, c. montre qu'il existe une coupe de capacité $\#E$, d'où le fait que la coupe minimale est de taille capacité ou égale à $\#E$. Ces deux remarques montre que le cardinal d'un ensemble couvrant minimal est égal à la capacité d'une coupe minimale. En vertu du théorème min-flow max-cut, c'est aussi le flot maximal du réseau de transport, qui par a. est égal au cardinal du couplage maximal.

e. La question posée revient à considérer le graphe biparti $F \cup H$, où chaque sommet de H a un degré entrant de k, et à montrer que le couplage maximal est de taille k. Comme chaque sommet de H a un degré entrant k et que les arêtes sont toutes entre H et F, il y a kn arêtes dans le graphe.

Soit maintenant E un ensemble couvrant de cardinal c. Chaque sommet ayant un degré k, E couvre au plus ck arêtes ; il s'ensuit que $c \geq n$, et donc que l'ensemble couvrant minimal est de cardinal $\geq n$. Comme le couplage maximal est de cardinal au plus n, le théorème de König montre qu'il existe bien un couplage de taille n, i.e. que tous les hommes peuvent danser.

3. a. On considére le graphe $G' = (S', A')$ de l'énoncé. Dans ce graphe on décide que x_0 est la source et y_0 le puits, et que les arcs sont de capacité 1.

Un flot φ dans G' détermine un ensemble C d'arcs de G de la façon suivante : $(x_i, x_j) \in C$ si et seulement si on a $\varphi(x_i, y_j) = 1$. Comme le flot partant d'un x_i est limité par la somme des capacités entrantes (1), il y a au plus un arc de C qui part d'un sommet x. Pour des raisons symétriques il y a au plus un arc de C qui arrive en x. L'ensemble C détermine ainsi un ensemble de chemins dans G.

Le flot sortant de x_0 est égal au nombre d'arcs de C. Or, le nombre d'arcs d'un chemin sans cycle est exactement le nombre de sommets qui le constituent, moins un. En sommant cette identité sur tous les sommets, on déduit que le nombre de chemins est égal au nombre n total de sommets, diminué du nombre d'arcs constituant les chemins. La recherche d'un flot optimal revient à chercher un nombre de chemins minimal.

b. S'il existe un cycle, l'algorithme permet toujours de trouver un ensemble de chemins dont le nombre d'arcs est maximal, mais il n'y a plus de relation *a priori* entre nombre d'arcs d'un chemin et nombre de sommets le constituant. En particulier, si l'on savait traiter ce problème en temps polynomial, on saurait détecter en temps polynomial si un graphe admet un circuit hamiltonien (s'il peut être recouvert par un seul chemin), problème qui est NP-complet.

c. On considère le graphe S induit par la relation d'ordre, dont les sommets sont les éléments de l'ensemble, et où il y a une arête de u vers v si et seulement si $u \leq v$. S'il existait un cycle $u_1, \ldots, u_k$ dans ce graphe, on aurait $u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_k \leq u_1$, et tous les éléments sont alors égaux par antisymétrie de la relation d'ordre. Le graphe S est donc acyclique.

Un chemin dans ce graphe est alors exactement une chaîne, et le nombre minimum de chaînes recouvrant l'ensemble est donc exactement le nombre de chemin minimal recouvrant le graphe.

On applique alors le théorème de König au graphe S' correspondant : ce nombre est exactement le cardinal d'un ensemble couvrant minimal.

Mais si E est un ensemble couvrant et si l'on considère E' le complémentaire de E, il n'y a pas d'arêtes entre deux sommets quelconques de E' ; cela montre que deux sommets de E' proviennent de deux éléments incomparables de S.

Inversement, le complémentaire d'un ensemble d'éléments deux à deux incomparables, disons I fournit un ensemble couvrant de S' constitué des $x_0, y_0, (x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}$.

Les ensembles d'éléments deux à deux incomparables sont donc en bijection décroissante avec les ensembles couvrants de S' ; en particulier, les ensembles couvrants minimaux, dont on a montré que le cardinal est exactement le nombre minimal de chaînes recouvrant l'ensemble, correspondent aux ensembles maximaux d'éléments deux à deux incomparables. D'où le théorème de Dilworth.

4. Fixons un sommet s du graphe, et pour un sommet $t \neq s$ définissons $R(s,t)$ comme le plus petit nombre d'arêtes à enlever à G pour qu'il ne soit plus possible d'aller de s à t. Le nombre $R(s,t)$ s'évalue par un calcul de flot : on construit un nouveau graphe orienté dans lequel on dédouble chaque arête pour orienter le graphe, que l'on attribue un poids 1 à chaque arête ; s est la source et t le puits. Le nombre $R(s,t)$ vaut alors exactement la coupure minimale (c'est la définition), donc le flot maximal.

Montrons maintenant que la résistance aux pannes $R(G)$ vaut $\min_{t \in G-\{s\}} R(s,t)$. Il est clair, par définition, que comme chaque $R(s,t)$ est associé à un ensemble d'arêtes déconnectant G, on a $R(G) \leq \min_{t \in G-\{s\}} R(s,t)$.

Si A est un ensemble minimal d'arêtes déconnectant G, le graphe résultant de la suppression des arêtes de A a deux composantes connexes, dont l'une contient s ; soit t un sommet de l'autre composante. On a alors $R(s,t) \leq R(G)$, puisque supprimer A sépare s de t. Par suite, $R(G) = \min_{t \in G-\{s\}} R(s,t)$, et on a montré comment déterminer $R(G)$ en n appels à un algorithme de flot, soit un coût total de $O(nm\Phi) = O(n^2 m)$, le flot maximal étant manifestement $O(n)$.

5. On construit un réseau de transport à $n+m+2$ sommets : la source s, le puits t, n sommets correspondant aux personnes et m sommets correspondant aux ensembles S_i. On ajoute des arcs entre la source et les personnes, et entre les ensembles S_i et le puits ; on ajoute enfin des arcs de chaque personne vers les ensembles S_i auxquels elle appartient.

La capacité des arcs est de 1, sauf pour les arcs de la source vers les personnes, de capacité $\lceil \sum_{i : p_j \in S_i} 1/\#S_i \rceil$, et on calcule le flot maximal.

On sait, en considérant la coupe $\{s, p_1, \ldots, p_n, s_1, \ldots s_m\}, \{t\}$, de capacité m, que le flot maximal est au plus de m. Si le flot a la valeur m exactement, l'algorithme de Ford-Fulkerson garantit qu'il est entier, et exactement un arc entrant dans chaque s_i sera saturé, indiquant quelle est la personne qui conduira le jour i. Notons en outre que la répartition sera nécessairement équilibré, puisque chaque personne ne peut conduire au plus que $\lceil \sum_{i:p_j \in S_i} 1/\#S_i \rceil$ jours en tout. Inversement toute répartition équitable provient d'un flot de valeur m.

Il suffit donc de montrer qu'il existe un flot de valeur m pour résoudre le problème ; or le flot fractionnaire qui fait passer sur chaque arc (p_i, s_j) un flot $1/\#S_j$ est un flot de valeur totale m, qui vérifie les contraintes aux sommets ; le flot maximal a donc pour valeur exactement m, et l'algorithme de Ford-Fulkerson nous fournira un flot entier de cette valeur.