École polytechnique — Majeure informatique
Promotion 2004

Cours « Conception et analyse d'algorithmes »
Devoir à rédiger n° 2 – NP-complétude
à rendre le 28 fevrier 2007 en début de pc

4. $\mathcal{NP}$-complétude de ORD-TACHES

On s'intéresse au problème suivant qui modélise l'ordonnancement de tâches sur un multiprocesseur : soit $\Gamma = (S, A)$ un graphe orienté sans circuit, où les sommets représentent les tâches et l'arc (x, y) signifie que la tâche x doit être exécutée avant la tâche y. Une *décomposition compatible* de Γ est une partition de l'ensemble des sommets $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_t$ (où S_i représente l'ensemble des tâches exécutée en parallèle à l'instant i), telle que si $x \in S_i$, $y \in S_j$, et $(x, y) \in A$, alors nécessairement $i < j$. La *profondeur* de la décomposition (nombre total d'étapes) est t, et sa *largeur* (nombre de processeurs nécessaire) est $l = \max_t \#S_t$. Etant donné Γ, t et l, le problème ORD-TACHES consiste à décider s'il existe une décomposition de Γ de profondeur au plus t et de largeur au plus l. Le but de l'exercice est de montrer que ce problème est $\mathcal{NP}$-complet.

On utilisera une réduction de CLIQUE à ORD-TACHES. Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté à n sommets et m arêtes ; on construit un graphe orienté Γ dont l'ensemble des sommets est $S = X \cup E$ et l'ensemble des arcs est $A = \{(x, e) \in X \times E, x \in e\}$.

i. On suppose que G n'a pas de sommet isolé. Soit $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ une décomposition compatible de Γ de profondeur 3. Montrer que $S_1 \cap E = \emptyset$ et que $S_3 \cap X = \emptyset$. Soit k le cardinal de $S_1 \cap X$. Montrer que $\#(S_2 \cap E) \leqslant k(k-1)/2$. Que dire des sommets $S_1 \cap X$ de G dans les cas où cette inégalité est en fait une égalité ?

ii. On augmente le graphe Γ en un nouveau graphe Γ' avec $S' = S \cup Y \cup Z \cup T$, $A' = A \cup Y \times Z \cup Z \times T$, et Y, Z et T de cardinaux p, q et r respectivement. Combien Γ' a-t-il d'arcs ?

Soit k tel que $k \leqslant n$ et $k(k-1)/2 \leqslant m$. Montrer que l'on peut choisir p, q, r, l de façon à avoir la propriété suivante : G admet une clique de taille k si et seulement si Γ' admet une décomposition compatible en trois sous-ensembles de même taille l.

iii. En déduire que ORD-TACHES est $\mathcal{NP}$-complet.