Corrigé du dm2

21 mars 2007

Ordonnancement de tâches

i) Soit $e = \{u, v\} \in E$. La décomposition est une partition de $X \cup E$, donc u figure dans l'un des ensembles de la décomposition, disons S_i, ainsi que e, disons dans S_j. On a $(u, e) \in A$, donc nécessairement par définition $1 \leq i < j \leq$. En particulier, $j \neq 1$ et $i \neq 3$, ce qui signifie $S_1 \cap E = S_3 \cap X = \emptyset$.

La même inégalité montre que $j = 2 \Rightarrow i = 1$, donc $S_2 \cap E$ est un sous-ensemble de $\{\{u, v\}, u \in S_1, v \in S_1\}$; cet ensemble est de cardinal $k(k-1)/2$, d'où $|S_2 \cap E| \leq k(k-1)/2$. Comme de fait $S_2 \cap E = \{\{u, v\}, u \in S_1, v \in S_1\} \cap E$, on voit que l'égalité n'a lieu que si $\{\{u, v\}, u \in S_1, v \in S_1\} \subset E$, ce qui signifie que toutes les arêtes entre éléments de $S_1 \cap X$ sont dans E, ou encore que $S_1 \cap X$ est une clique de G.

ii) On suppose Y, Z et T disjoints ; à partir de là, le calcul est simple : le nombre d'arcs est $|A| + pq + qr$. Or A contient deux éléments par arête de G, donc $|A| = 2m$.

Soit C une clique de taille k de G. On peut alors construire la décomposition compatible de Γ : $S_1 = C$, $S_2 = (C \times C) \cup (X - C)$, $S_3 = E - (C \times C)$; on peut en déduire une décomposition compatible de Γ' sous la forme $S_1 \cup Y$, $S_2 \cup Z$, $S_3 \cup T$. Dans ce cas, les cardinaux des ensembles sont $k + p, k(k-1)/2 + n - k + q, m - k(k-1)/2 + r$, et pour tout $l \geq \max(k, k(k-1)/2 + n - k, m - k(k-1)/2)$ on peut choisir p, q, r de sorte que la décomposition compatible de Γ' soit en trois sous-ensembles de même taille l.

Inversement, supposons que S admette une décomposition compatible en trois sous-ensembles de taille l. Un argument analogue à celui de la question i) montre que nécessairement $Y \subset S_1$, $Z \subset S_2$ et $T \subset S_3$. Par suite, $|S_1 \cap X| = l - p = k$, et $|S_2 \cap X| + |S_2 \cap E| = l - q = k(k-1)/2 + n - k$, d'où, vu $S_3 \cap X = \emptyset$, $|S_2 \cap E| = k(k-1)/2$ et $S_1 \cap X$ est une clique de taille k de G.

iii) ORD-TACHES est manifestement dans NP : la donnée d'une décomposition compatible, qui est de taille polynomiale, fournit un certificat vérifiable en temps polynomial, puisqu'il suffit, pour chaque i et chaque sommet de S_i d'énumérer les arêtes (x, y) issues de x et de vérifier que y est dans un ensemble S_j avec $j > i$; le coût est, au pire, un parcours de A et un parcours de S pour chaque sommet, donc $O(n^2 m)$. La question ii) montre que CLIQUE se réduit à un cas particulier de ORD-TACHES, celui où l'on fixe $t = 3$ et $l = |S|/3$; cette instance, et donc le problème ORD-TACHES plus généralement, est donc bien $\mathcal{NP}$-complet.

Remarque : l'ajout des ensembles Y, Z, T peut paraître artificiel, mais il permet de se ramener à l'énoncé initial d'ORD-TACHES. La construction de Γ permettait de montrer qu'il existait une clique de taille k si et seulement s'il existait une décomposition compatible avec $|S_1| = k$ et $|S_2| = k(k-1)/2 + n - k$, ce qui ne se réduit pas de façon aisée à l'existence d'une décomposition compatible dont tous les ensembles sont de taille $\leq l$. Ajouter Y, Z et T a fourni le degré de liberté nécessaire.