Programmation linéaire

1. Le problème, un exemple.
2. Le cas $b = 0$
3. Théorème de dualité
4. L'algorithme du simplexe
5. Problèmes équivalents
6. Complexité de l'Algorithme

Position du problème

Soit A une matrice de réels de taille $m \times n$, b et c deux vecteurs de réels de taille m et n respectivement. Résoudre le problème linéaire défini par A, b, c consiste à trouver des réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfaisant les m inéquations (une pour chaque i entre 1 et m) :

$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_j \ \leq b_i \qquad (1)$$

parmi ceux-ci il faut trouver ceux qui rendent maximal :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2)$$

Problème concret

Un fleuriste dispose de 50 lys, 80 roses et 80 jonquilles. Il réalise ou bien des bouquets qu'il vend 40 euros comprenant 10 lys, 10 roses et 20 jonquilles, ou bien des bouquets dont il tire un prix de 50 euros qui comprennent 10 lys, 20 roses et 10 jonquilles. Comment le fleuriste doit il former les bouquets pour réaliser une recette maximale ?

Modélisation mathématique

$10x$: nombre de bouquets du premier type,
$10y$: nombre de bouquets du deuxième type.

$$\begin{cases} x + y & \leq & 5 \\ 2x + y & \leq & 8 \\ x + 2y & \leq & 8 \end{cases}$$

$$\max 4x + 5y$$

Remarques

On appelle souvent $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ la *fonction économique*

Les $A_{i,j}, b_i, c_j$ ne sont pas nécessairement positifs. On peut remplacer la recherche d'un maximum par un minimum et des $\leq$ par des $\geq$.

Plusieurs situations peuvent se rencontrer

1. Il n'existe pas de x_j satisfaisant les inéquations (1)
2. Parmi les x_j satisfaisant les inéquations la somme (2) peut être aussi grande que l'on veut
3. Il existe plusieurs valeurs donnant l'optimum
4. Il existe une et une seule valeur donnant l'optimum

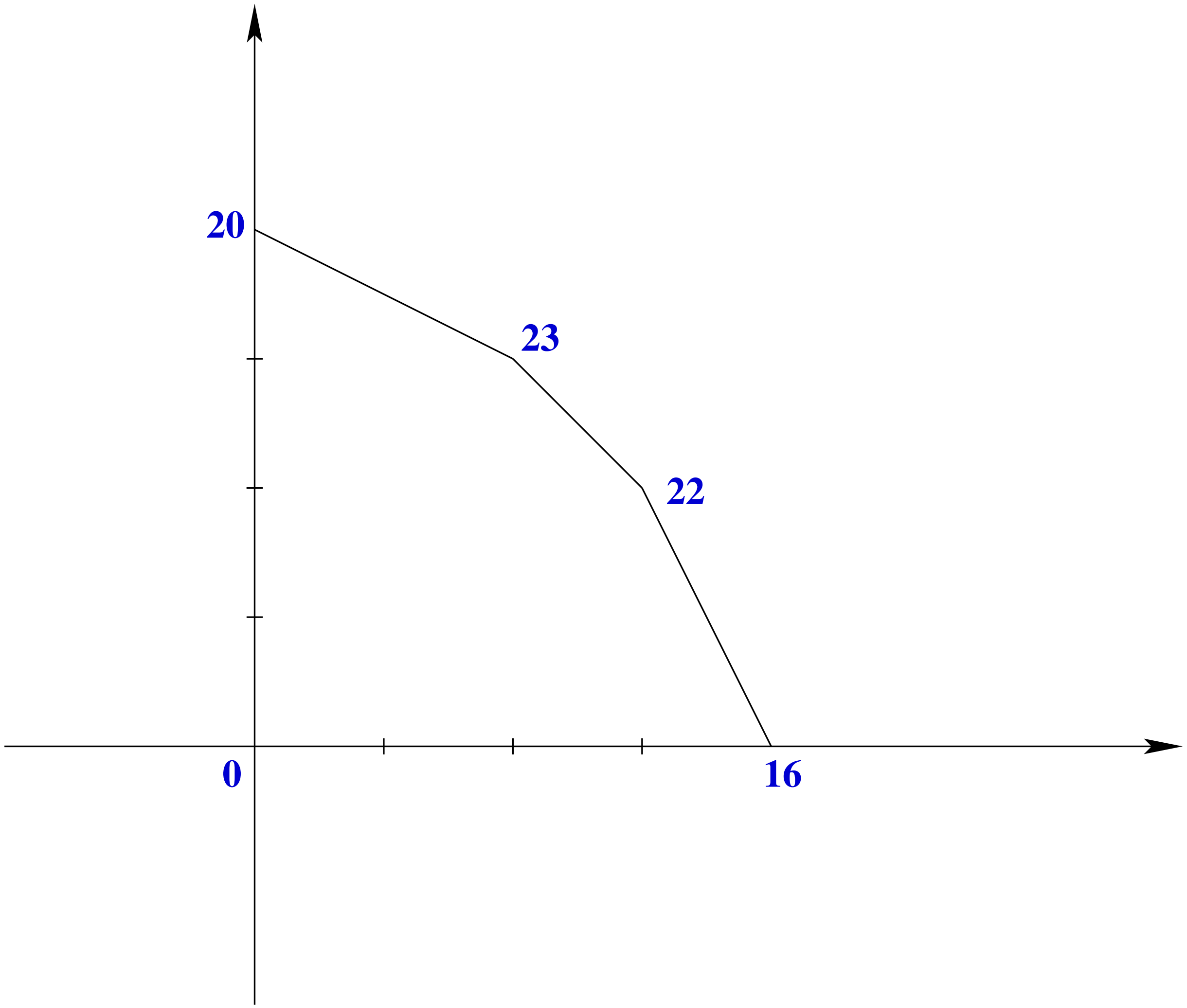
Interprétation économique

- x_j nombre de produits finis de type j fabriqués
- $a_{i,j}$ quantité de matière première de type i nécessaire pour fabriquer un produit de type j
- b_i quantité de matière première de type i disponible
- c_j bénéfice réalisé par produit fini de type j

Sur l' exemple très simple du fleursite il y a deux variables x et y, les contraintes sont

$$\begin{cases} x + y & \leq & 5 \\ 2x + y & \leq & 8 \\ x + 2y & \leq & 8 \end{cases}$$

$$\max 4x + 5y$$


20
23
22
0
16

Résultats géomètriques

- L'ensemble des x satisfaisant

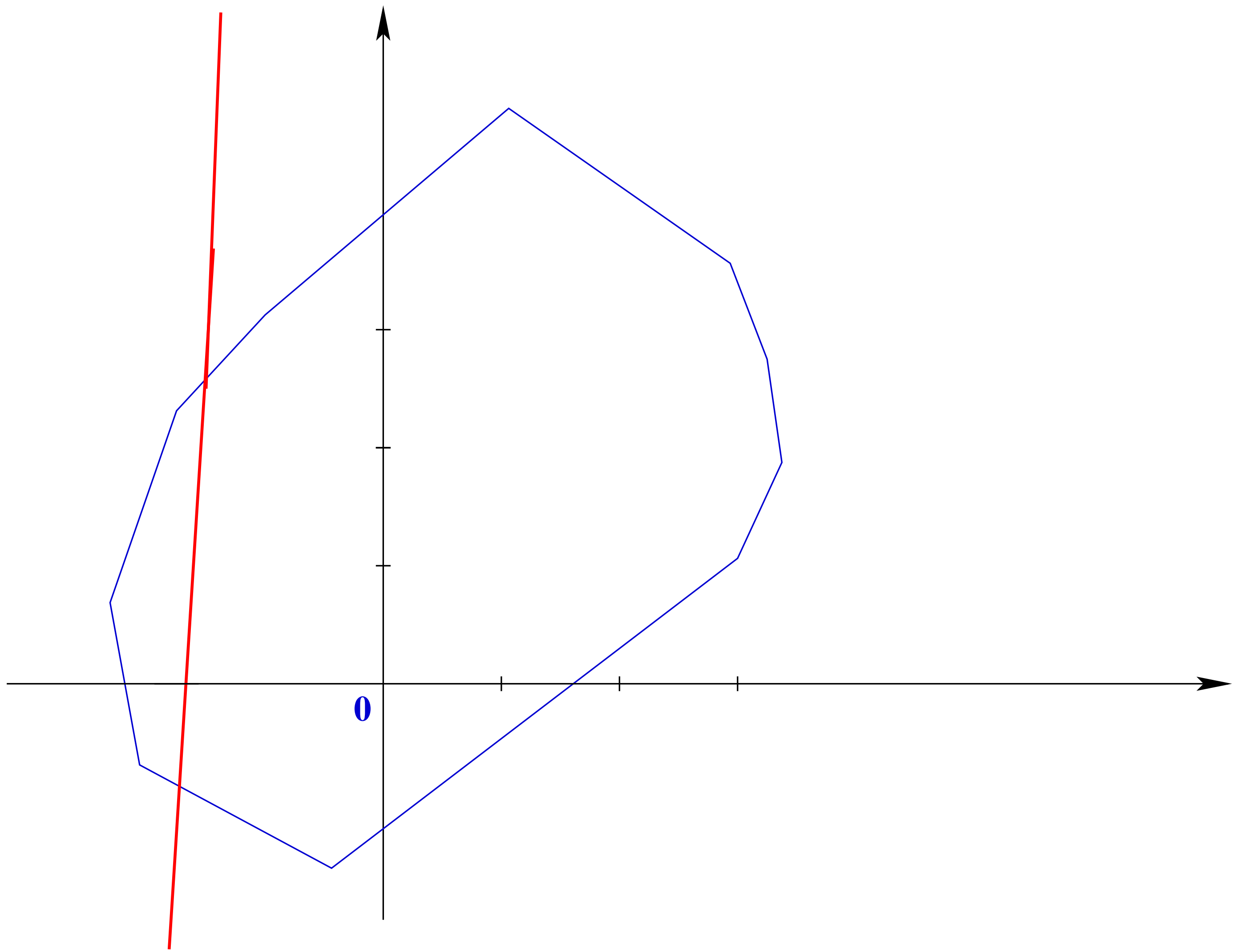
$$Ax \leq b$$

  forme un polyèdre convexe

- Un sommet du polyèdre est l'intersection de n hyperplans
- Si le polyèdre est borné, il existe nécessairement un sommet qui réalise l'optimum
- Un sommet réalise l'optimum si et seulement si ses voisins donnent une valeur plus faible à la fonction économique

Trois situations possibles

1. Les contraintes sont impossibles à satisfaire
2. Le maximum de cx pour $ax \leq b$ est infini
3. Le maximum est fini et atteint par un ou plusieurs x


0

Méthode du Simplexe

1. Partir d'un sommet quelconque P_0 du polytope, `i :=0`
2. Tant qu'il existe un voisin Q de P_i qui améliore la fonction économique faire $P_{i+1} = Q$; `i++`
3. Si on trouve une direction pour laquelle la fonction augmente indéfiniment : Arrêt

A préciser :

- Terminaison
- Que faire si voisin égal?
- Comment trouver si cela augmente indéfiniment?

Cas $b = 0$

Situation particulière:

- Il existe toujours un point qui satisfait les contraintes
- On a soit un optimum infini soit un optimum nul, car s'il existe un u satisfaisant $Au \leq 0$ et $cu > 0$ alors pour $K > 1$ on vérifie que Ku est meilleur que u puisque $AKu \leq 0$ et $cKu = Kcu > cu$
- Comment déterminer si l'optimum est à l'infini ou si $x = 0$ est l'optimum?

- Si c n'est pas combinaison linéaire des lignes de A, alors il existe u tel que $cu > 0$ et $Au = 0$ ainsi l'optimum est infini
- Si c s'exprime comme une combinaison des lignes de A alors ou bien il existe un u tel que $Au \leq 0$ et $cu > 0$ ou bien il existe un $y \geq 0$ tel que $c = yA$.

Les deux derniers cas sont exclusifs. En effet

$$yA = c \quad \Rightarrow \quad cu = yAu, \quad y \geq 0 \Rightarrow cu \quad \text{et} \quad Au \quad \text{ont même signe}$$

Théorème Si l'un des deux problèmes suivants

$$(\mathcal{P}) \quad \max \quad \{cx \mid Ax \leq 0\}$$

$$(\mathcal{D}) \quad \exists y, \quad y \geq 0, \; yA = c$$

admet une solution alors il en est de même pour l'autre et $0 = \max\{cx \mid Ax \leq 0\}$.

Algorithme du simplexe simplifié

SOIT I UN ENSEMBLE D'INDICES QUI FORME UNE BASE DE L'ESPACE ENGENDRÉ PAR LES LIGNES DE A, EXPRIMER c COMME UNE COMBINAISON LINÉAIRE DES LIGNES $L_i,\ i \in I$.

$$c = \sum_{i \in I} y_i L_i$$

TANT QU'IL EXISTE $y_i < 0$ FAIRE

SOIT h LE PLUS PETIT INDICE TEL QUE $y_h < 0$ ET SOIT u LE VECTEUR DE R^n TEL QUE $L_j u = 0$ POUR $j \in I, j \neq h$ ET $L_h u = -1$

SI $L_i u \leq 0$ POUR $i = 1, \ldots m$ ALORS u MONTRE LE CARACTÈRE NON BORNÉ

SINON CHOISIR s LE PLUS PETIT TEL QUE $L_s u > 0$; POSER $I := I - \{h\} \cup \{s\}$ ET EXPRIMER c COMME PLUS HAUT.

Preuve de terminaison (1)

Ensemble d'indices I tel que L_i pour $i \in I$ est une base de l'espace engendré par les lignes.

$$c \ = \ y_1 L_{i_1} \ + \ y_1 L_{i_1} + \cdots\cdots + \ y_k L_{i_k}$$

- Si pour tout $i \in I$ on a $y_i \geq 0$ c'est fini.
- Sinon on prend h le plus petit tel que $y_h < 0$

Preuve de terminaison (2)

Vecteur u tel que $L_i u = 0$ pour $i \neq h \in I$ et $L_h u = -1$.

On a toujours

$$cu = -y_h > 0$$

- Si pour tout $i \notin I$ on a $L_i u \leq 0$ c'est fini, car $Au \leq 0$, et l'optimum est infini.
- Sinon on prend s le plus petit i dans $\{1, 2, \ldots, m\}$ tel que $L_s u > 0$ et on pose

$$I' = I - h + s$$

- On vérifie que I' définit les indices de lignes qui forment une base de l'espace engendré par celles-ci.

Preuve de terminaison (3)

On suppose que l'algorithme boucle

On retrouve deux fois le même ensemble I; soit r l'indice le plus grand qui sort de I entre les deux étapes

On remarque aussi que c'est le plus grand qui entre!.

On note I_p la valeur de I avant que r sorte et I_p la valeur de I après que r entre

$$I \rightarrow \ldots \rightarrow I_p \rightarrow \cdots\cdots \rightarrow I_q \rightarrow \ldots \rightarrow I$$

- Soit u' la valeur de u avant construction de I_q.
- Alors $L_r u'$ est le seul $L_i u'$ non nul pour $i \in I_q$ et:

$$cu' \;\; > \;\; 0$$

Preuve de terminaison (4)

On suppose que l'algorithme boucle ...

$$c = \sum_{i \in I_p} y_i L_i$$

Pour $i \in I_p, i < r$, on a $y_i > 0$

On remarque aussi que l'on a aussi pour ces valeurs de i, $L_i u' < 0$ car au moment de rentrer dans I_q, r est le plus petit parmi $\{1, 2, \ldots, m\}$ tel que $L_r u' > 0$

Preuve de terminaison (5)

On suppose que l'algorithme boucle ...

$$cu' = \sum_{i \in I_p} y_i L_i u'$$

$$cu' = \sum_{i<r} y_i L_i u' + y_r L_r u' + \sum_{i<r} y_i L_i u'$$

Pour $i \in I_p, i > r,$ i est à la fois dans I_P et dans I_q donc $L_i u' = 0$ ainsi :

$$cu' = \sum_{i<r} y_i L_i u' + y_r L_r u' < 0$$

Contradiction!

Système d'inéquations

Le système d'inéquations $Ax \leq b$ admet une solution si et seulement si pour tout y :

$$y \leq 0,\ yA = 0 \ \Rightarrow\ yb \leq 0$$

- Preuve: On pose $A' = [Id\ \ A\ \ -A]$
- $Ax \leq b$ admet une solution si et seulement s'il existe $u \geq 0$ tel que: $A'u \ = \ b$
- Ce qui est équivalent à: $yA' \leq 0 \ \ \Rightarrow yb \leq 0$

Théorème de dualité

Si l'un des deux problèmes suivants

$$(\mathcal{P}) \quad \max\{cx \mid Ax \leq b\}$$

$$(\mathcal{D}) \quad \min\{by \mid y \geq 0,\ yA = c\}$$

admet une solution finie alors il en est de même pour l'autre et on a :

$$\min\{by \mid y \geq 0,\ yA = c\} = \max\{cx \mid Ax \leq b\}.$$

Interprétation économique du dual

Remarque On augmente la quantité de matière première d'une valeur marginale t_i (petit), l'augmentation du gain est alors $y_i t_i$ où y_i est la valeur qui rend optimum le problème dual.

Algorithme du simplexe

Soit I un sous-ensemble de n éléments de $\{1, 2, \ldots, m\}$ et soit x solution de $A_I x = b_I$ satisfaisant $Ax \leq b$

Soit y tel que $c = \sum_{i \in I} y_i L_i$ et $y_j = 0$ pour $j \notin I$.

Si $y \geq 0$ alors x est solution du système.

Sinon soit i le plus petit indice tel que $y_i < 0$ et soit U_i la colonne correspondante de A_I^{-1}; déterminer pour chaque ligne L_j de la matrice A la valeur $v_j = -L_j U_i$.

Si $\forall j,\ v_j \leq 0$ alors cx est non borné pour $Ax \leq b$

Sinon soit j tel que $\frac{b_j - L_j x}{v_j}$ soit minimum parmi les v_j positifs. On pose alors $I := I - \{i\} \cup \{j\}$ et on calcule x, intersection des hyperplans correspondants.

Calcul effectif d'un exemple

On considère

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} -x_1 & \leq & 0 & & -x_3 & \leq & 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & \leq & 4 & & 3x_1 - 2x_2 + x_3 & \leq & 2 \\ x_1 - 2x_2 & \leq & 5 & & -x_1 + x_3 & \leq & 8 \end{array}\right.$$

$$\max x_1 + x_2 + x_3$$

On pose $I = \{1, 2, 3\}$ et on a le point $(0, 4, 0)$ qui est réalisable

$$A_I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad {A_I}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Etape 1.

$$cA_I{}^{-1} \quad = \quad (1, -2, 1)$$

On supprime la ligne 2 la colonne correspondante dans $A_I{}^{-1}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le produit de cette colonne par l'opposée de chacune des lignes de la matrice A donne $0, -1, 0, -1, -2, 1$. $I = \{1, 3, 6\}$

$$A_I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_I{}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Etape 2.

Le point x est égal à $(0, 12, 8)$

$cA_I^{-1} \;=\; (-1, 1, 2)$

On supprime la ligne 1, la colonne correspondante est alors

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le produit de cette colonne par l'opposée de chacune des lignes de la matrice A donne $-1, -1, 0, 6, 3, 0$.

$$\frac{b_j - L_j x}{v_j}$$

qui vaut 3 pour $j = 4$ et 9.66 pour $j = 5$ on retient donc la ligne 4 et on obtient $I = 3, 4, 6$.

$$A_I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_I{}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Etape 3.

On trouve le point $x = (3, 9, 11)$ et on a $cA_I^{-1} = 1/6(8, 1, 13)$ qui est positif on a donc atteint l'optimum qui vaut 23 pour ce point x.

Problèmes posés par l'algorithme du simplexe

- Risque de bouclage, car la fonction économique n'augmente pas strictement à chaque étape ?
- Comment trouver une valeur initiale?
- Algorithme non polynomial

Initialisation

$$Ax \leq b, \quad x_i \geq 0, \quad \max cx$$

Si les b_i ne sont pas positifs la solution triviale $x_i = 0$ n'est pas un des sommets du polyèdre

- On ajoute une nouvelle variable x_{n+1} et on conside're :

$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}x_j - x_{n+1} \leq b_i, \quad i = 1, \ldots m$$

- La fonction économique est x_{n+1} qu'il faut minimiser
- Point admissible: $x_i = 0$ pour $i \leq n$ et x_{n+1} supérieur à toutes les valeurs absolues de b_i

Le problème initial est réalisable si et seulement si le deuxième admet pour solution optimale $x_{n+1} = 0$

Complexité

Algorithme non polynomial

On montre que le système suivant à n variables donne lieu à un nombre d'étapes voisin de 2^n :

$$\max \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j$$

$$(2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j) + x_i \leq 100^{i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

De l'obtention d'une solution vers l'obtention de l'optimum

Si on a un algorithme polynomial qui résout des systèmes d'inéquations linéaires, alors on peut résoudre un problème d'optimisation linéaire en temps polynomial

On utilise la dualité

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ \max cx \end{cases} \qquad \begin{cases} Ax \leq b \\ yA \geq c \\ cx \geq yb \end{cases}$$

De l'existence d'une solution vers l'obtention d'une solution

On suppose que l'algorithme $Alg(S)$ donne pour résultat `true` si S admet une solution et `false` sinon

Procédure ReduitVariables(S)

- $J = \{1, 2, \ldots, n\}$
- Pour $j_1 = 1, 2, \ldots n$ faire
  - Si

$$Alg(\sum_{j \in J \setminus j_1} A_{i,j} x_j \leq b_i \; ; \; i = 1, \ldots, m)$$

  - Alors

$$J := J \setminus j_1$$

Remarques

- Si `Alg` est polynomial `ReduitVariable` l'est aussi
- Le J construit par la procédure est tel que :

1. $$\sum_{j \in J} A_{i,j} x_j \leq b_i \;\; i = 1, \ldots, m$$

   admet une solution

2. Pour tout $j_1 \in J$

   $$\sum_{j \in J \setminus j_1} A_{i,j} x_j \leq b_i \;\; i = 1, \ldots, m$$

   n'admet pas de solution

Procédure ReduitEquation(S)

- $I = \emptyset$
- Pour $i_1 = 1, 2, \ldots m$ faire
  - Si

$$Alg(\sum_{j \in J} A_{i,j} x_j \leq b_i, \sum_{j \in J} A_{i,j} x_j \geq b_i \;\; ; \;\; i \in I \cup \{i_1\})$$

  - Alors

$$I := I \cup \{i_1\}$$

Après `ReduitEquation` le système :

$$\begin{cases} \sum_{j \in J} A_{i,j} x_j = b_i & i \in I \\ \sum_{j \in J} A_{i,j} x_j \leq b_i & i \notin I \end{cases}$$

admet une solution

On vérifie que le système réduit:

$$\sum_{j \in J} A_{i,j} x_j = b_i \quad \forall i \in I$$

admet une solution unique.

S'il y a deux solutions on peut choisir une combinaison linéaire des deux qui :

- a un $x_j = 0$ contredisant la minimalité de J
- satisfait une équation $\sum_{j \in J} A_{i,j} x_j = b_i$ de plus contredisant la maximalité de I.

La résolution du système réduit donne en $O(n^3)$ une solution du système d'inéquations initial.

Méthode de l'ellipsoïde

1. Réduction à la résolution de systèmes d'inéquations linéaires.

Si on sait résoudre les systèmes d'inéquations linéaires en temps polynomial, alors on sait résoudre un programme linéaire en temps polynomial.

$$\begin{cases} \max cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \min bu \\ A^T u \geq c \\ u \geq 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} Ax \leq b \\ A^T u \geq c \\ x, u \geq 0 \\ cx \geq bu \end{cases}$$

2. Résoudre un système d'inéquations.

Soit D le nombre total de bits dans l'écriture des $a_{i,j}$ et des b_i en binaire. Si le système $Ax < b$ admet une solution, alors il en existe une telle que

$$\forall j, \quad -2^D \leq x_j \leq 2^D.$$

D'autre part, le volume du polyèdre est $\geq 2^{-(n+1)D}$.

Un **ellipsoïde** E de centre c est défini par $(x-c)^t A^t A(x-c) \leq 1$. Un demi-ellipsoïde s'obtient en intersectant E avec un demi-espace limité par un hyperplan qui passant par c : $hx \geq hc$. Tout demi-ellipsoïde est contenu dans un ellipsoïde E' tel que

$$\text{Vol}(E') \leq e^{-\frac{1}{2(n+1)}} \text{ Vol}(E).$$

Principe de l'algorithme de l'ellipsoïde

Initialisation : $E \leftarrow$ la sphère $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq n4^D$.

Boucle : Tant que $c_E \notin P$ et $\mathrm{Vol}(E) \geq 2^{-(n+1)D}$, faire :

- Soit h une contrainte non satisfaite par c_E ; intersecter E avec le demi-espace défini par la contrainte $\Rightarrow D$.
- Remplacer E par l'ellipsoïde E' contenant D

Sortie : si $c_E \in P$, c'est une solution ; sinon, il n'y en a pas

Complexité : polynomiale.