M1, 2005–2006

COMPLEXITÉ STRUCTURELLE – TD 8
Classes de comptage

Exercice 1

1. Montrer que A est dans PP si et seulement s'il existe une machine non-déterministe polynomiale M telle que
$$x \in A \iff M(x) \text{ a plus de la moitié de chemins acceptant.}$$
2. Soit $0 < \alpha < 1$ rationnel. Montrer que $A \in \mathrm{PP}$ si et seulement s'il existe $B \in \mathrm{P}$ et un polynôme $p(n)$ tel que
$$x \in A \iff |\{y \in \{0,1\}^{p(|x|)} / (x,y) \in B\}| \geq \alpha 2^{p(|x|)}.$$
Qu'en est-il si on enlève la contrainte « α rationnel » ?

On rappelle la définition d'un langage p-sélectif A : il existe une fonction f calculable en temps polynomial (f est appelée la fonction de sélection), telle que pour tout $x, y \in \{0,1\}^*$, on ait :
- $f(x,y) = x$ ou $f(x,y) = y$;
- si $x \in A$ ou $y \in A$ alors $f(x,y) \in A$.

Exercice 2

1. Montrer qu'un langage p-sélectif A est dans $\mathrm{PP}/O(n)$. On pourra utiliser $|A^{=n}|$ comme conseil.
2. Montrer que dans un tournoi, il existe un sommet duquel tout autre sommet est accessible par un chemin de taille ≤ 2.
3. En déduire qu'un langage p-sélectif est dans $\mathrm{NP}/(n+1)$. Remarque : on sait construire un langage p-sélectif qui n'est pas dans NP/n.

Exercice 3

FewP est l'ensemble des langages reconnus par machines non-déterministes polynomiales, ayant au plus un nombre polynomial de chemins acceptant.
Montrer que $\mathrm{FewP} \subseteq \oplus\mathrm{P}$.

Exercice 4 (Question ouverte)

Donner une fonction $f \in \#\mathrm{P}$ telle que $\mathrm{P}^f = \mathrm{P}^{\mathrm{NP}}$. On pourra se contenter de $\mathrm{P}^{\mathrm{NP}} \subseteq \mathrm{P}^f \subseteq \mathrm{PH}$. Ou alors, montrer qu'un tel f n'existe pas.