M1, 2005–2006

Complexité structurelle – TD 7
Classes probabilistes et de comptage

Exercice 1 Montrer que pour une machine probabiliste M à horloge polynomiale donnée en entrée, les deux problèmes suivants sont indécidables.

1. Sur toute entrée x, soit tous les chemins rejettent, soit la probabilité d'acceptation est $\geq 3/4$ (machine RP).
2. Sur toute entrée x, soit la probabilité de rejet est $\geq 3/4$, soit la probabilité d'acceptation est $\geq 3/4$ (machine BPP).

Exercice 2
Montrer que NP $\subseteq$ PP.

Exercice 3
Soit $0 < \alpha < 1$ rationnel. Montrer que $A \in \mathrm{PP}$ si et seulement s'il existe $B \in \mathrm{P}$ et un polynôme $p(n)$ tel que

$$x \in A \iff |\{y \in \{0,1\}^{p(|x|)} / (x,y) \in B\}| \geq \alpha 2^{p(|x|)}.$$

Qu'en est-il si on enlève la contrainte « α rationnel » ?

Exercice 4

1. Montrer que $\mathrm{P}^{\mathrm{PP}} \subseteq \mathrm{P}^{\#\mathrm{P}}$.
2. Soit $f \in \#\mathrm{P}$. Montrer que le langage $A = \{(x,k) / f(x) \geq k\}$ est dans PP.
3. En déduire que $\mathrm{P}^{\#\mathrm{P}} \subseteq \mathrm{P}^{\mathrm{PP}}$.