M1, 2005–2006

Complexité structurelle – TD 3
Langages creux et unaires

1 Une conséquence de Mahaney

Exercice 1
Montrer (sans utiliser le théorème de Mahaney) qu'il existe un langage creux NP-complet si et seulement s'il existe un langage creux NP-difficile.

2 Changement d'échelle

On rappelle les deux définitions suivantes :

$$\mathrm{E} = \bigcup_{c \geq 0} \mathrm{DTIME}(2^{cn})$$

et

$$\mathrm{NE} = \bigcup_{c \geq 0} \mathrm{NTIME}(2^{cn}).$$

Exercice 2 (Échauffement gentil avant l'exercice 3)
Montrer que si $\mathrm{E} = \mathrm{NE}$ alors tous les langages unaires de NP sont dans P.

Exercice 3
Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{E} = \mathrm{NE}$;

(ii) $\mathrm{NP} - \mathrm{P}$ ne contient pas de langage creux ;

(iii) $\mathrm{NP} - \mathrm{P}$ ne contient pas de langage unaire.

On pourra montrer (iii)⇒(i) (réciproque de l'exercice 2), puis (i)⇒(ii), puis conclure.

3 Une autre caractérisation de P/poly

Exercice 4
Montrer que

$$\mathrm{P/poly} = \bigcup_{S \text{ creux}} \mathrm{P}^S = \bigcup_{T \text{ unaire}} \mathrm{P}^T.$$

En déduire que s'il existe un langage creux NP-difficile pour les réductions Turing, alors il existe un langage unaire NP-difficile pour les réductions Turing.