Complexité structurelle – TD 2
Hiérarchie polynomiale (suite), conseils

1 La hiérarchie polynomiale

On rappelle la définition de la hiérarchie polynomiale :

$$\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0 = \mathrm{P},$$

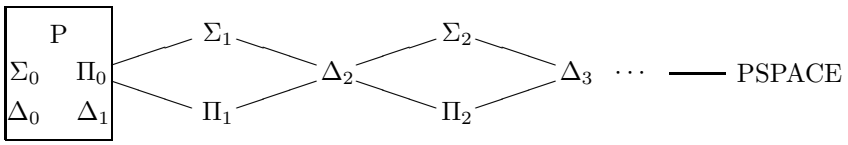
et pour $k \geq 1$,

$$\Sigma_k = \mathrm{NP}^{\Sigma_{k-1}}, \Pi_k = \mathrm{coNP}^{\Sigma_{k-1}}, \Delta_k = \mathrm{P}^{\Sigma_{k-1}}.$$

Enfin,

$$\mathrm{PH} = \cup_k \Sigma_k.$$

Exercice 1
Montrer que PH $\subseteq$ PSPACE.
Récapitulons les inclusions connues :



Exercice 2

1. Donner un problème complet SAT_k pour chaque Σ_k, $k \geq 1$.
2. Montrer que si PH admet un problème complet, alors pour un certain k, PH $= \Sigma_k$.
3. Montrer que PSPACE = PH implique PSPACE = PH $= \Sigma_k$ pour un certain k.

Exercice 3
Soit Minimum circuit le problème suivant : étant donné un circuit booléen en entrée, est-il vrai qu'il n'existe pas de circuit plus petit calculant la même fonction ?
Situer Minimum circuit le plus bas possible dans la hiérarchie polynomiale.

2 La classe DP

Définition – Un langage L est dans la classe DP si et seulement s'il existe un langage $L_1 \in$ NP et un langage $L_2 \in$ coNP tels que $L = L_1 \cap L_2$.

Exercice 4

1. Comparer DP et NP $\cap$ coNP.
2. Donner un problème DP-complet.
3. Montrer que Unique sat, le problème consistant à déterminer si une formule booléenne est satisfaite par une unique affectation, est dans DP.

3 Classes avec conseil

Exercice 5

1. Montrer que
$$\mathrm{NP} \subset \mathrm{P/log} \Longleftrightarrow \mathrm{P} = \mathrm{NP}.$$
2. Montrer que
$$\mathrm{PSPACE} \subset \mathrm{P/poly} \Longrightarrow \mathrm{PSPACE} = \Sigma_2 \cap \Pi_2.$$