Complexité structurelle – TD 1
Oracles et hiérarchie polynomiale

On rappelle la définition de la hiérarchie polynomiale :

$$\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0 = \mathrm{P},$$

et pour $k \geq 1$,

$$\Sigma_k = \mathrm{NP}^{\Sigma_{k-1}}, \Pi_k = \mathrm{coNP}^{\Sigma_{k-1}}, \Delta_k = \mathrm{P}^{\Sigma_{k-1}}.$$

Enfin,

$$\mathrm{PH} = \cup_k \Sigma_k.$$

1 Oracles

Exercice 1

1. Se remémorer la définition d'une classe avec oracle. Expliquer pourquoi deux classes de complexité peuvent être égales, et pourtant différentes relativement à un oracle (par exemple, IP et PSPACE). Et inversement.
2. Si $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont trois classes de complexité, a-t-on $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 \Longrightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{C}_1} = \mathcal{C}^{\mathcal{C}_2}$?
3. Voir pourquoi il se pourrait que $\mathrm{P}^{\mathrm{NP}} \neq \mathrm{NP}$.

Exercice 2

Montrer qu'il existe un oracle A tel que $\mathrm{P}^A = \mathrm{NP}^A$, et un oracle B tel que $\mathrm{P}^B \neq \mathrm{NP}^B$. Utiliser la question 1 de l'exercice 1 pour voir que cela n'implique pas trivialement $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$.

2 La hiérarchie polynomiale

Exercice 3

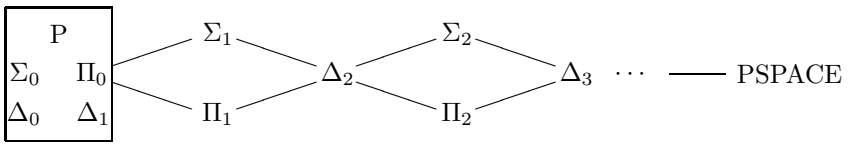
1. Montrer que $\Pi_k = \mathrm{co}\Sigma_k$.
2. Montrer que $A \in \Sigma_k$ si et seulement s'il existe $B \in \mathrm{P}$ et un polynôme $p(n)$ tels que

$$x \in A \Longleftrightarrow \exists y_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)}\ \forall y_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)}\ \ldots\ Q\ y_k \in \{0,1\}^{p(|x|)}\ (x, y_1 \ldots y_k) \in B,$$

   et de même pour Π_k en commençant par $\forall$.
3. Montrer que si $\Sigma_k = \Pi_k$ pour un certain $k \geq 1$, alors $\mathrm{PH} = \Sigma_k$.

Exercice 4

Montrer que $\mathrm{PH} \subseteq \mathrm{PSPACE}$.
Récapitulons les inclusions connues :



Exercice 5

1. Donner un problème complet SAT_k pour chaque Σ_k, $k \geq 1$.
2. Montrer que si PH admet un problème complet, alors pour un certain k, $\mathrm{PH} = \Sigma_k$.
3. Montrer que $\mathrm{PSPACE} = \mathrm{PH}$ implique $\mathrm{PSPACE} = \mathrm{PH} = \Sigma_k$ pour un certain k.