TD08 - Début des circuits

Exercice 1.

1. Donner un circuit booléen qui calcule la somme de deux entiers $y_n...y_1$ et $x_n...x_1$ écrits en base 2 de taille n et évaluer sa taille et sa profondeur.

2. On améliore la profondeur du circuit précédent de la manière suivante. On suppose que n est une puissance de 2. On calcule en parallèle la somme de $y_{n/2}...y_1$ et $x_{n/2}...x_1$ ainsi que les sommes $y_n...y_{n/2+1} + x_n...x_{n/2}$ et $y_n...y_{n/2+1} + x_n...x_{n/2} + 1$, puis on choisit le résultat en fonction de la retenue. Évaluer la taille et la profondeur du circuit.

3. Généraliser la construction précédente («diviser pour régner»), donner la taille et la profondeur du circuit obtenu.

Exercice 2.

1. Montrer que si C est un circuit booléen dont aucune entrée n'est une sortie, alors :

$$t(C) \leq 3(t(C) - e(C))$$

2. Montrer que pour tout terme T, alors $2e(T) - 1 \leq t(T)$, et il y a égalité si toutes les portes qui ne sont pas des entrées reçoivent deux flèches.

3. Montrer que si T est un terme on peut trouver un terme T' équivalent (donc en particulier avec le nombre d'entrées), de taille et de profondeur inférieure et qui satisfasse :

$$2e(T') - 1 \leq t(T') \leq 3e(T') - 1$$

4. Le nombre de portes d'un circuit C est une mesure pertinente de sa taille. En effet, on montrera que le nombre de flèches est compris entre $t(C) - s(C)$ et $2(t(C) - e(C))$.

5. Montrer que pour tout circuit C :

$$p(C) \leq t(C) - e(C) \text{ et } t(C) \leq s(C).(2^{p(C)+1} - 1)$$

. Montrer que pour tout terme T, $\log_2(e(T)) \leq p(T)$.

Exercice 3. *Théorème de Hoover, Klawe et Pippenger*

Théorème de Hoover, Klawe et Pippenger : À tout circuit booléen C correspond un circuit équivalent C^* de degré sortant deux tel que

$$t(C^*) \leq 3t(C) \text{ et } p(C^*) \leq 2p(C) + \log_2(s(C))$$

.

1. Montrer le résultat pour la taille. Qu'obtient on pour la profondeur ?

2. On introduit la notion de pondération dans un arbre binaire renversé. Si toute sortie (toute feuille) est affectée d'un poids, qui est un entier positif, on définit inductivement le poids d'un noeud de l'arbre comme étant le maximum des poids de ses fils, augmenté de un. Montrer que quelle que soit la distribution de poids entiers $a_1, ..., a_n$ dont on affecte les points $p_1, ..., p_n$, il est possible de construire au dessus un arbre renversé dont le poids c de la racine satisfasse $2^c < 2.(2^{a_1} + ... + 2^{a_n})$.

3. Soit C un circuit. On le découpe en niveaux à partir du bas. Soit N_0 l'ensemble des sorties et N_1 l'ensemble des portes qui n'émettent des flèches que vers des sorties. L'ensemble N_2 est constitué des portes qui n'émettent des flèches que vers des portes de N_0 ou N_1. On veut que le circuit soit bien étagé, c'est-à-dire que les portes de N_2 n'émettent des flèches que vers des portes de N_1. Pour cela, on ajoute éventuellement des portes d'identité au niveau N_1 entre une porte de N_2 et une sortie. On construit de même tous les niveaux du circuit. Donner un exemple de cette construction sur un circuit de votre choix.

4. Utiliser les deux questions précédentes pour montrer le résultat sur la profondeur.

Exercice 4.

1. Montrer que toute fonction booléenne en n variables peut être représentée par un terme booléen de profondeur (au plus) $n + \log_2 n + 2$ et de taille exponentielle en n. En déduire que pour tout polynôme p il existe pour n assez grand une fonction n-aire non exprimable par un terme de taille $p(n)$. C'est l'effet Shannon. Il montre l'existence de problèmes non-polynomiaux.

Exercice 5.

1. Montrer que tout circuit acceptant tous les $00..010..00$ et refusant $00...0$ a une profondeur supérieure ou égale à $\log_2 n$. En déduire que l'expression de la fonction $Sup(x_1, ..., x_n)$ nécessite un circuit de profondeur au moins $\log_2 n$ (et donc qu'il n'est pas raisonnable d'exiger des circuits de profondeur moins que logarithmique).