

---

**TD06 - Le jeu de Go**

---

**Exercice 1.***Geography*

Le jeu GEO oppose deux joueurs, appelés ici Alice et Bob. Alice commence le jeu en nommant une ville convenue. Chaque joueur alternativement doit alors trouver une ville dont le nom commence par la dernière lettre du nom de la ville précédemment citée. Une même ville ne peut être citée deux fois. Le premier joueur qui ne peut plus continuer (les villes commençant par la dernière lettre de la dernière ville considérée ont toutes été nommées) a perdu.

1. Montrer que le problème suivant (encore appelé GEO) est plus général que le problème précédent :  
Soit donné un graphe orienté  $G$  et un sommet de départ. Alice et Bob fabriquent un chemin en choisissant alternativement un sommet, sans passer deux fois par le même sommet. Le premier joueur qui ne peut plus jouer a perdu. Existe-t-il une stratégie gagnante pour Alice ?
2. Montrer que TQBF se réduit polynomialement à GEO.
3. En déduire que GEO est PSPACE-complet.

**Définitions et règles du jeu de Go**

Le plateau est une grille de  $19 \times 19$  points. Un point est soit inoccupé, soit occupé par une pierre noire, soit occupé par une pierre blanche. Chaque point a quatre voisins : ceux situés directement au-dessus, au-dessous, à droite et à gauche. Les points en diagonale ne sont pas voisins. Alice joue en posant ou non une pierre blanche et Bob en posant ou non une pierre noire sur la grille.

Grossièrement, le but du jeu est de former de grands groupes de pierres de sa couleur qui soient en sécurité et de capturer le plus possible de pierres de la couleur de l'adversaire.

Les définitions et règles suivantes sont symétriques pour les noirs et les blancs.

Un *groupe noir* est un ensemble maximal de pierres noires connexe sur la grille. Un groupe noir est *encerclé* si aucune pierre du groupe n'a de voisin inoccupé. Sitôt qu'un groupe noir devient encerclé, en général parce qu'une pierre blanche a été posée, il est capturé et enlevé du plateau. Alice n'a pas le droit de poser une pierre blanche qui provoque l'encercllement d'un groupe blanc sans provoquer l'encercllement d'un groupe noir. Par contre si un groupe noir et un groupe blanc se retrouvent simultanément encerclés par le dépôt d'une pierre blanche, alors le groupe noir est capturé.

**Règles modifiées**

Nous altérons maintenant les véritables règles du jeu. La grille est constituée de  $n \times n$  points. Une partie dure exactement  $n^2$  coups. Le gagnant est celui dont il reste le plus de pierres sur la grille. En cas d'égalité des nombres de pierres restantes, les blancs sont déclarés vainqueurs.  $GO$  est l'ensemble des couples formés d'une configuration du plateau et d'un entier  $k < n^2$  tels que les joueurs se retrouvent dans cette configuration après  $k$  coups, c'est à Alice de jouer et elle a une stratégie gagnante.

**Exercice 2.***Let's Go*

1. Montrer que Go est dans PSPACE.

Nous allons maintenant montrer que Go est PSPACE-complet en réduisant GEO à Go.

2. Montrer que pour *GEO*, il suffit de considérer les cas où le graphe est obtenu par réduction de *TQBF*.

3. Montrer qu'il suffit également de considérer les cas où tout sommet du graphe est soit de degré entrant un et de degré sortant au plus deux, soit de degré sortant un et de degré entrant au plus deux.

4. Montrer qu'il suffit de considérer des graphes planaires.

5. Donner les différents types de sommets qui finalement peuvent être présents dans le graphe.

6. Le graphe est simulé à l'aide d'un plateau sur lequel se trouve un large rectangle blanc entouré de noir, à l'exception d'un fil blanc bordé de noir qui s'en échappe. Il reste  $p$  coups à jouer. Montrer qu'on peut prendre la taille de la zone blanche suffisamment grande de manière à ce que l'issue de la partie ne dépende que du fait que ce groupe soit ou non capturé. Montrer comment le graphe peut être simulé.

### Exercice 3.

*Passe-temps*

1. Jouer à GEO avec son voisin en attendant la fin de l'heure...