TD10 - P/poly

Exercice 1.

1. Montrer qu'il existe un langage indécidable dans P/poly.

2. Montrer que tout langage creux est dans P/poly.

3. Nous allons montrer qu'il existe un langage décidable hors de P/poly.

✎ Majorer le nombre de circuits dont le code est de taille $\leq n^{\log n}$.

✎ A n fixé, on veut définir $L^{=n}$ tel que L est différent de tous les circuits de taille $\leq n^{logn}$. Définir $L \cap \{0^n\}$ tel qu'au la moitié de ces circuits se trompent sur 0^n.

✎ Définir complètement le langage $L^{=n}$, montrer que L ainsi construit n'est pas reconnu par des circuits de taille polynomiale. Conclure.

Exercice 2. *Théorème de hiérarchie non uniforme*

Pour toute fonction $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on note $SIZE(T(n))$ l'ensemble des familles de circuits de taille au plus $T(n)$.

1. Montrer que toute fonction de $\{0,1\}^l \to \{0,1\}$ est calculée par un circuit de taille $2^l \cdot l$.

2. Montrer qu'il existe des fonctions de $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ qui ne peuvent pas être calculées par un circuit de taille $2^n/10n$.

3. Montrer que si T et T' vérifient $2^n/n > T'(n) > 10T(n) > n$, alors

$$SIZE(T(n)) \subsetneq SIZE(T'(n))$$

Exercice 3.

1. Montrer qu'un langage L est dans P si et seulement si il est décidé par une famille de circuits $\{C_n\}$ telle que :

- la fonction $SIZE$ qui sur l'entrée n retourne la taille (le nombre de portes) de C_n
- la fonction $TYPE$ qui sur l'entrée (n, i) calcule le type de la i-ème porte de C_n
- la fonction $EDGE$ qui sur l'entrée (n, i, j) décide s'il y a une flèche entre la porte i et la porte j dans C_n

sont toutes les trois calculables par machines de Turing en espace $O(\log n)$.

Suite facultative

Lorsque ces trois fonctions sont calculables en temps polynomial et non plus en espace logarithmique, on dit que la famille de circuits $\{C_n\}$ est DC-uniforme (DC pour Direct Connected). On remarque qu'avec cette définition, la taille des circuits peut être exponentielle.

2. Montrer qu'un langage L est dans PH si et seulement si L peut être calculé par une famille DC-uniforme de circuits $\{C_n\}$ vérifiant :

- la taille de C_n est en $2^{n^{O(1)}}$, et la profondeur est constante.

– les portes ET et OU peuvent avoir un nombre arbitrairement grand d'arrêtes entrantes.
– les portes NOT sont toutes appliquées directement à des portes de variables ou constantes.

3. Montrer que si l'on ommet la restriction sur la profondeur constante dans la définition précédente, on reconnaît exactement EXP.