Magistère de Mathématiques et d'Informatique **Pierre-Alain Reynier**
ENS de Cachan *2 octobre 2006*
TD de Calculabilité et de Complexité

Modèles de calculs

Exercice 1 (Machines à plusieurs rubans)
Une machine de Turing à k rubans est un 7-uplet $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, F)$ où Q, Γ, Σ, q_0, B et F ont leurs définitions inchangées par rapport aux machines de Turing classiques, mais où la fonction de transition δ est une fonction de $Q \times \Gamma^k$ dans $Q \times (\Gamma \times \{G, 0, D\})^k$.

1. Montrer que tout langage accepté par une machine de Turing M à k rubans l'est aussi par une machine M' à un seul ruban.
2. Si M calcule en temps $f(n) \geq n$, montrer qu'il existe M' (comme ci-dessus) qui calcule en temps $O(f(n)^2)$.
3. En reprenant une des machines de Turing construites au td précédent, illustrer ce gain en complexité.

Exercice 2 (Automates à compteurs)
Un automate à compteurs est un tuple (Q, q_0, F, C, δ) tel que :
– Q est un ensemble fini d'états,
– $q_0 \in Q$ est l'état initial,
– $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux,
– C est un ensemble fini de compteurs,
– δ est un ensemble fini de règles d'une des trois formes suivantes ($q, q', q'' \in Q$ et $x \in C$) :

$$\begin{cases} (1) \quad q \longrightarrow \text{ if } x > 0 \text{ then } \{x - -, q'\} \text{ else } q'' \\ (2) \quad q \longrightarrow \{x + +, q'\} \\ (3) \quad q \longrightarrow q' \end{cases}$$

Si $|C| = k$, on note $C = \{x_1, \dots, x_k\}$ et on parle d'automate à k compteurs. Une configuration d'un automate à k compteurs est un tuple $(q, v_1, \dots, v_k) \in Q \times \mathbb{N}^k$. La sémantique des automates à compteurs est la suivante : soit une règle $r \in \delta$ de membre gauche égal à q. Fixons une configuration $c_1 = (q, v_1, \dots, v_k)$. Alors la règle peut être appliquée à partir de c_1, et la nouvelle configuration est $c_2 = (q_2, w_1, \dots, w_k)$, définie ainsi :

1. si $r = q \to$ if $x_i > 0$ then $\{x_i - -, q'\}$ else q'', alors si $v_i > 0$, on a $q_2 = q'$, $w_j = v_j$ pour tout $j \neq i$, et $w_i = v_i - 1$, et sinon on a $q_2 = q''$ et $(w_1, \dots, w_k) = (v_1, \dots, v_k)$.
2. si $r = q \to \{x_i + +, q'\}$, alors $q_2 = q'$, $w_j = v_j$ pour tout $j \neq i$, et $w_i = v_i + 1$.
3. si $r = q \to q'$, alors $q_2 = q'$ et $(w_1, \dots, w_n) = (v_k, \dots, v_k)$.

Un automate à compteurs prend en entrée un ensemble de valeurs initiales pour ses compteurs. On dit que cet ensemble est accepté s'il existe une exécution de l'automate menant à un état final.

1. Montrer que les opérations de multiplication par une constante, division entière par une constante, test de divisibilité par une constante sont simulables par automate à compteurs (quitte à augmenter le nombre de compteurs).

2. Montrer que l'on peut simuler une machine de Turing par un automate à 4 compteurs. (Réfléchir au codage des mots par des entiers.)
3. Montrer que l'on peut simuler une machine de Turing par un automate à 2 compteurs. (Utiliser la question précédente.)

Exercice 3 (Machines rationnelles)
Une machine rationnelle est définie comme une liste finie de fractions irréductibles $r_1, \dots, r_n \in Q$. Par exemple, la liste $(\frac{2}{3}, \frac{7}{5}, \frac{3}{7})$ définit une machine M_1.

Une machine rationnelle prend en entrée un entier naturel $k_0 \in N$. Une configuration d'une machine rationnelle est simplement un entier $k \in \mathbb{N}$. Initialement, $k = k_0$. Une étape de calcul d'une machine rationnelle se déroule ainsi : la machine cherche une fraction $\frac{p}{q}$ telle que le dénominateur q divise k. S'il n'en existe pas, la machine s'arrête. Sinon, elle prend la première telle fraction apparaissant dans la liste, et remplace k par $\frac{p}{q} * k$. L'entrée k_0 est acceptée par la machine si celle-ci s'arrête sur une valeur k divisible par 2.

1. Donner l'exécution de M_1 sur l'entrée 15.
2. Calculer l'ensemble des entiers naturels acceptés M_1.
3. Montrer que les machines de Turing peuvent simuler les machines rationnelles.
4. Réciproquement, montrer que l'on peut simuler une machine de Turing par une machine rationnelle. Plus précisément, on considère qu'une machine de Turing accepte un entier naturel si et seulement si elle accepte sa représentation en base 2. Montrer qu'on peut construire M' telle que :

   $$M \text{ accepte } n \text{ si et seulement si } M' \text{ accepte } 3^n$$

   Indication : Utiliser l'exercice précédent.
5. En déduire l'existence d'une machine rationnelle qui accepte exactement l'ensemble des nombres de la forme 3^p où p est premier.