Calculabilité
Devoir à rendre avant le 16 octobre 2006

29 septembre 2006

L'objet des trois questions posées est l'étude de l'indécidabilité de problèmes dérivés du pavage du plan.

Définitions préliminaires

Un *polyomino* est un sous-ensemble connexe de $\mathbb{R}^2$ qui est une union finie de produits d'intervalles $[i, i+1[\times[j, j+1[$ où $i, j \in \mathbb{N}$ et tel qu'il reste connexe si on retire un nombre fini de points. (Autrement dits, les petits carrés qui forment le polyomino se touchent par au moins un côté). Des exemples de polyominos sont dessinés dans la figure 1 et des contre-exemples dans la figure 2.

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et $F \subseteq \mathbb{R}^2$, le *translaté* de F par (x, y) est l'ensemble $\tau_{x,y}(F) = \{(x+u, y+v) \mid (u, v) \in F\}$.

Si $F_1, \ldots, F_n$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ et F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, un *pavage de F par $F_1, \ldots, F_n$* est un ensemble de paires de réels E (les points où sont posées les pièces) et une application f de E dans $\{F_1, \ldots, F_n\}$ telle que

$$\begin{cases} F = \displaystyle\bigcup_{(x,y)\in E} \tau_{x,y}(f(x, y)) \\ \forall(x, y), (x', y') \in E, (\tau_{x,y}(f(x, y)) \cap \tau_{x',y'}(f(x', y')) \neq \emptyset) \Rightarrow x = x' \& y = y' \end{cases}$$

Autrement dit, les pièces $F_1, \ldots, F_n$ peuvent être utilisées plusieurs fois à des endroits différents, elles ne doivent pas se chevaucher et doivent recouvrir entièrement F. Attention : on ne peut dans cette définition effectuer ni rotation ni symétrie sur les pièces. Sur la figure 3 est donné un exemple de pavage. Les deux pièces utilisées sont $F_1 = [0, 1] \times [0, 2]$ et $F_2 = [0, 2] \times [0, 1]$, l'ensemble E est $\{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 2), (0, 3), (2, 1), (3, 1), (2, 3)\}$ et f est donnée par $f(0, 0) = F_1, f(1, 0) = F_1, f(2, 0) = F_2, f(0, 2) = F_2, f(0, 3) = F_2, f(2, 1) = F_1, f(3, 1) = F_1, f(2, 3) = F_2$.

Question 1

Montrer que le problème suivant est indécidable :

Donnée : un ensemble fini S de polyominos

Question : existe-t-il un pavage de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ par S ?

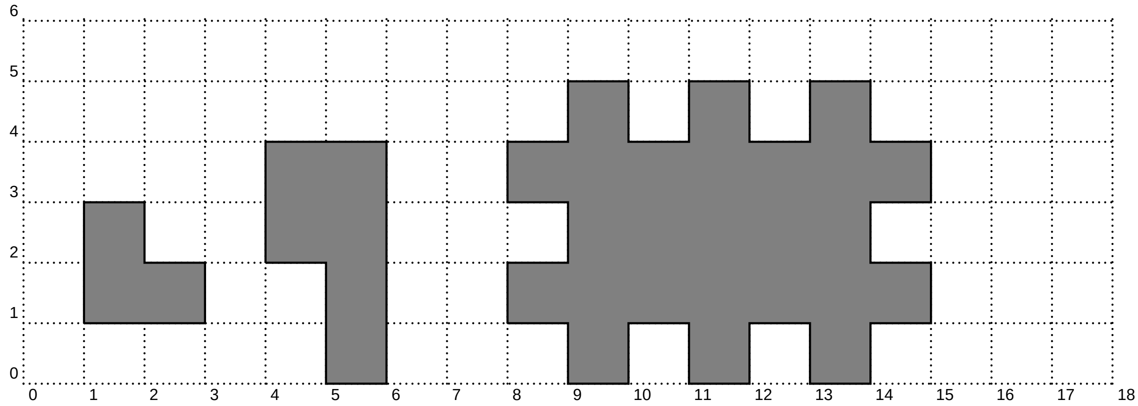

FIG. 1 – Exemples de polyominos

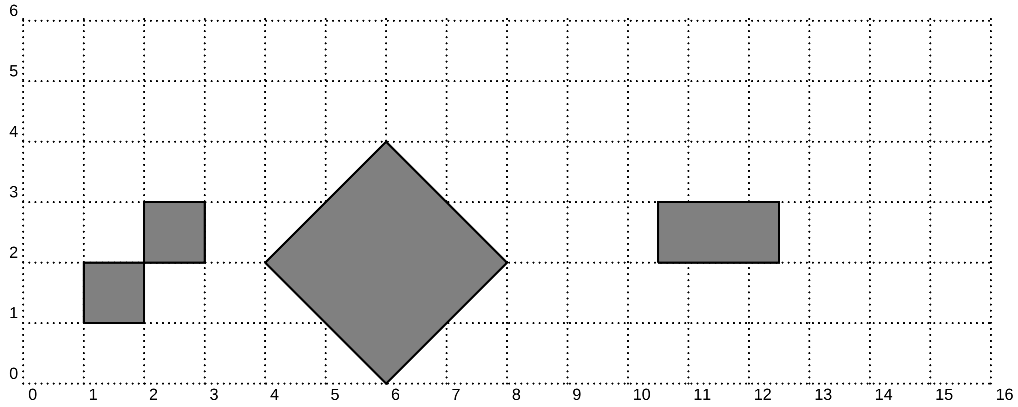

FIG. 2 – Contre-Exemples de polyominos

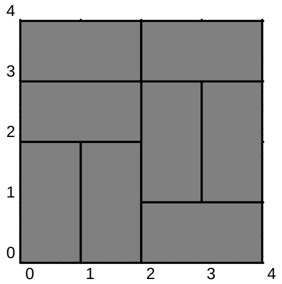

FIG. 3 – Pavage d'un carré 4×4 par deux dominos

Question 2

Montrer que le problème suivant est indécidable :

Donnée : un ensemble fini S de polyominos

Question : existe-t-il un entier $n > 0$ tel qu'il existe un pavage de $[0, n[\times[0, n[$ par S ?

Une variante de Tétris

Dans notre version de Tétris étudiée ici, la base est de largeur k (fixée) et les pièces sont choisies dans un ensemble S fini de polyominos dont l'orientation ne peut pas être modifiée.

On suppose que tous les polyominos de S contiennent un point au moins dont l'abcisse est 0 et on note $l(p)$ le maximum des abcisses de la pièce p. On supposera toujours $l(p) \leq k - 1$.

Formellement, une *configuration* du jeu est un sous-ensemble (fini) de $\{1, \ldots, k\} \times \mathbb{N}$. La configuration initiale est l'ensemble vide. Les configurations c sont confondues avec les sous-ensembles de $[0, k[\times\mathbb{R}_+$ définis par $\bigcup_{(i,j)\in c}[i, i+1[\times[j, j+1[$.

Étant donné $p \in S$ et $i \in \{1...k\}$ tel que $i + l(p) \leq k$, le jeu effectue un mouvement de la configuration c vers la configuration c' définie comme suit :

Chute de la pièce : Soit h le plus petit entier tel que $\tau_{i,h}(p) \cap c = \emptyset$. Soit $c_0 = c \cup \tau_{i,h}(p)$.

Elimination des lignes pleines : une “ligne j est pleine” lorsque $[1, k[\times[j, j+1[\subseteq c_0$. Tant que c_0 contient une ligne j pleine, on remplace c_0 par la configuration c_1 obtenue en supprimant cette ligne :

$$c_1 = \{(i, m) \in c_0 \mid m < j\} \cup \{(i, m-1) \mid (i, m) \in c_0, m > j\}$$

c' est la configuration obtenue après suppression de toutes les lignes pleines.

Si A est un ensemble fini, l'ensemble des *expressions rationnelles* sur A est le plus petit ensemble qui contient A, ϵ et tel que, si e_1 et e_2 sont des expressions rationnelles, alors $e_1 + e_2$, $e_1 \cdot e_2$ et e_1^* sont des expressions rationnelles. Une expression rationnelle est interprétée comme un ensemble de mots sur l'alphabet A comme suit :

- Si $e \in A \cup \{\epsilon\}$, $[\![e]\!] = \{e\}$
- $[\![e_1 + e_2]\!] = [\![e_1]\!] \cup [\![e_2]\!]$
- $[\![e_1 \cdot e_2]\!] = \{w_1 \cdot w_2 \mid w_1 \in [\![e_1]\!], w_2 \in [\![e_2]\!]\}$
- $[\![e_1^*]\!] = \bigcup_{i=0}^{+\infty}[\![e_1^i]\!]$ où, $e_1^0 = \epsilon$ et $e_1^{i+1} = e_1 \cdot e_1^i$.

Pour notre problème, nous considérerons pour A l'ensemble des paires (p, i) où $p \in S$ et $i \in \mathbb{N}$ tel que $i + l(p) \leq k - 1$.

Question 3

Montrer que le problème suivant est indécidable :

Donnée : une expression rationnelle e sur A

Question : existe-t-il un mot $w \in [\![e]\!]$ tel qu'on puisse atteindre une configuration vide après la séquence de mouvements définie par w ?

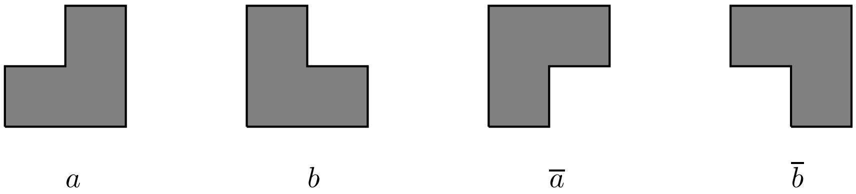

Fig. 4 – Quelques polyominos particuliers

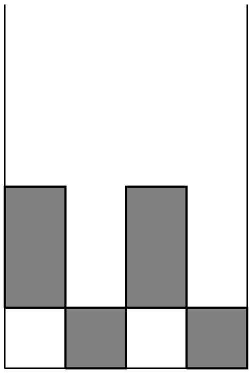

Fig. 5 – Configuration après $a_g a_d b_g b_d \overline{a_g}\,\overline{a_d}$

Une indication, vers une preuve possible : considérer par exemple les polyominos donnés dans la figure 4.

On suppose que $k = 4$. On considère alors l'alphabet $A = \{a_g, a_d, b_g, b_d, \overline{a_g}, \overline{a_d}, \overline{b_g}, \overline{b_d}\}$ où x_g correspond au polyomino x avec une translation $i = 0$ et x_d correspond au polyomino x avec la translation $i = 2$. Par exemple, la séquence de lettres $a_g a_d b_g b_d \overline{a_g}\,\overline{a_d}$ conduit à la configuration de la figure 5.

On propose ensuite de réduire le problème de correspondance de Post.