3.2.2 Fonctions semi-récursives et ensembles récursivement énumérables

Un ensemble de fonctions F est *fermé par minimisation* si, pour toute application $\xi \in F$ telle que $\forall \vec{n} \exists m. \xi(\vec{n}, m) = 0$, la fonction ϕ définie par

$$\phi(\vec{n}) = \min_m(\xi(\vec{n}, m) = 0)$$

est dans F.

Definition 3.2 *L'ensemble des* fonctions récursives (totales) *est le plus petit ensemble de fonctions qui contient les fonctions initiales et qui est fermé par composition, récursion primitive, et minimisation.*

Théorème 3.6 *La fonction d'Ackermann est récursive totale.*

C'est une conséquence de l'exercice 6.

La minimisation est étendue au cas où on n'a pas nécessairement $\forall \vec{n} \exists m. \xi(\vec{n}, m) = 0$. Dans ce cas, la fonction ϕ définie est une fonction partielle :

$$\phi(\vec{n}) = \min\{m \mid (\xi(\vec{n}, m) = 0) \wedge \forall k < m, \xi(\vec{n}, k) \neq \perp\}$$

La composisition de fonctions récursives totales est étendue aux fonctions partielles : la composée n'est définie que lorsque les fonctions composantes le sont. De même, la récursion primitive appliquée à des fonctions partielles : $\phi = \mathsf{Prim}(\xi, \psi)$ est définie en $(m, \vec{n})$ si $m = 0$ et $\xi(\vec{n}) \neq \perp$ ou bien $m > 0$, $\phi(m-1, \vec{n})$ est définie et ψ est définie en $(\phi(m-1, \vec{n}), m-1, \vec{n})$.

Definition 3.3 *L'ensemble des fonctions* récursives partielles *(aussi appelées* fonctions semi-récursives*) est le plus petit ensemble de fonctions sur les entiers contenant les fonctions initiales et clos par récursion primitive, composition et minimisation.*

Un ensemble est *récursif* si sa fonction caractéristique est une fonction récursive totale. Un ensemble S est *récursivement énumérable* si la fonction qui vaut 1 quand $n \in S$ et est indéfinie ou vaut 0 quand $n \notin S$ est récursive partielle.

On veut montrer tout d'abord que la récursion primitive peut être simulée par les autres constructions.

On note $\mathcal{C}$ le plus petit ensemble de fonctions sur les entiers qui contient les fonctions initiales, l'addition, la multiplication, l'égalité, et qui est clos par composition et minimisation. (Donc pas de récursion primitive ici).

Exercice 9
Montrer que les fonctions ou prédicats suivants sont dans $\mathcal{C}$:

1. conjonction, disjonction, négation de prédicats dans $\mathcal{C}$
2. Si $P, f_1, f_2 \in \mathcal{C}$, $f = \lambda n.\text{if}P(n)$ then $f_1(n)$ else $f_2(n)$
3. La soustraction entière : $x \setminus y = \max(0, x - y)$
4. L'inégalité $x \geq y$
5. $D(n, m)$ qui est satisfait sit $n \neq 0$ et n divise m
6. $\text{rem}(x, y)$ qui calcule le reste de la division de x par y lorsque $y \neq 0$ (et est indéfini lorsque $y = 0$).

7. $\forall x \leq f(\vec{y}).P(x,\vec{y})$ et $\exists x \leq f(\vec{y}).P(x,\vec{y})$ où $P, f \in \mathcal{C}$.
8. $Prime(n)$ qui est satisfait par les nombres premiers
9. $PP(n)$: "n est une puissance d'un nombre premier".

Lemme 3.7 *Il existe une fonction $\beta \in \mathcal{C}$ (la fonction* beta de Gödel*) telle que, pour tout n et toute séquence $a_0, \ldots, a_n$, il existe un entier d tel que, pour tout $i = 0, \ldots, n$, $\beta(d,i) = a_i$.*

Preuve
On pose $N = \max(n, a_0, \ldots, a_n)$ et $u_i = 1 + (i+1)N!$. Alors $u_i > a_j$ et $\gcd(u_i, u_j) = 1$ pour $i \neq j$.

Le système d'équations $z = a_i \mod u_i$ a alors une unique solution b telle que $b < u_0 \times \ldots \times u_n$.

On pose enfin $d = J(b, N!)$ et $\beta(x,y) = \mathrm{rem}(K(x), 1 + (y+1)L(x))$

On vérifie aisément que $\beta \in \mathcal{C}$ à l'aide des exercices précédents.

De plus,

$$\beta(d,i) = \mathrm{rem}(K(d), 1 + (i+1)L(d)) = \mathrm{rem}(b, 1 + (i+1)N!) = \mathrm{rem}(b, u_i) = a_i$$

Élimination de la récursion primitive :

Théorème 3.8 *$\mathcal{C}$ coïncide avec l'ensemble des fonctions récursives partielles.*

Preuve
Comme l'addition, la multiplication et l'égalité sont facilement expressibles comme des fonctions récursives primitives, il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est clos par récursion primitive.

Soit

$$f(x,\vec{n}) = \begin{cases} \xi(\vec{n}) & \text{Si } x = 0 \\ \psi(f(x-1,\vec{n}), x-1, \vec{n}) & \text{Sinon} \end{cases}$$

Soit alors

$$f'(x,\vec{n}) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(\min_b(S(x,b,\vec{n}) = 1), x)$$

où

$$S(x,b,\vec{n}) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(b,0) = \xi(\vec{n}) \wedge \forall i < x.(\beta(b,i+1) = \psi(\beta(b,i),i,\vec{n}))$$

On a bien $f' \in \mathcal{C}$, par le lemme 3.7 et l'exercice 9.

Si $f(i,\vec{n})$ est définie pour $i \leq x$, en posant $a_i = f(i,\vec{n})$, on montre facilement (par récurrence sur i) que $a_{i+1} = \psi(a_i, i, \vec{n})$ pour tout $i < x$. Mais alors, par le lemme 3.7, il existe un entier d tel que, pour tout $i \leq x$, $\beta(d,i) = a_i$ et donc, par récurrence sur i, $\beta(d,0) = \xi(\vec{n})$ et $\beta(d,i+1) = \psi(\beta(d,i),i,\vec{n})$. Il en résulte qu'il existe au moins un entier b tel que $S(x,b,\vec{n}) = 1$. Mais alors, si c est un entier qui réalise le minimum des b tels que $S(x,b,\vec{n}) = 1$, $\beta(c,x) = f(x,\vec{n})$ par définition. Et donc $f'(x,\vec{n}) = f(x,\vec{n})$.

Si maintenant $f(i,\vec{n})$ est indéfinie. Si $i = 0$, $S(x,b,\vec{n})$ ne vaut jamais 1 et $f'(x,\vec{n})$ est indéfini. Si $i > 0$, alors $\psi(f(i-1,\vec{n}), i-1, \vec{n})$ est indéfini et donc $S(i,b,\vec{n})$ est indéfini. $f'(i,\vec{n})$ est alors indéfini (puisque $S(i,b,\vec{n}) \neq 1$ quel que soit b).

Dans tous les cas, $f(x,\vec{n}) = f'(x,\vec{n})$. Donc $f \in \mathcal{C}$.

Théorème 3.9 *Les fonctions calculables sur les entiers sont les fonctions récursives partielles. Les fonctions totales calculables sont les fonctions récursives totales.*

Preuve

Tout d'abord, les fonctions récursives partielles (resp. totales) sont calculables. On montre que l'ensemble des fonctions calculables, contient l'addition, le test d'égalité, les fonctions initiales, la multiplication et est clos par composition et minimisation. Les fonctions calculables contiennent ainsi $\mathcal{C}$ et donc toutes les fonctions récursives, d'après le théorème précédent.

– soit M_0 une machine à k rubans et $M_1, \ldots, M_k$ k machines à n rubans calculant respectivement $f_0, f_1, \ldots, f_k$. La machine à $n \times k$ rubans dont les données sont sur les rubans de numéro divisible par k et qui simule M_i sur les rubans $i \times k - i + 1, \ldots, i \times k$, puis M_0 sur les rubans de numéros divisibles par k calcule $f_0(f_1(\vec{n}), \ldots, f_k(\vec{n}))$.
– Pour la minimisation : on garde sur un ruban les essais successifs de la valeur n. Initialement, $n = 0$. Si le calcul de $f(n, \vec{x})$ se termine et donne 0, on rend n. Si le calcul se termine avec une valeur distincte de 0, on incrémente n et on recommence.

Réciproquement, étant donné une machine de Turing, on construit une fonction récursive primitive qui simule un mouvement de la machine, puis avec un coup de minimisation on termine. Plus précisément : les mots sont considérés comme des entiers en base $|\Sigma| + 1$. Les configurations sont des triplets (q, w_1, w_2) et sont donc codés de manière bijective par des entiers. La fonction f qui à $C(q, w_1, w_2)$ associe $C(q', w'_1, w'_2)$, codage de la configuration suivante si elle existe et 1 si $q = \textbf{accept}$, 0 si $q = \textbf{reject}$, est une fonction primitive récursive puisque les fonctions reste, produit, somme sont primitives récursives.

On définit alors $g(n, \gamma)$ par $g(0, \gamma) = \gamma$ et $g(n+1, \gamma) = g(n, f(\gamma))$. Enfin,

$$h(\gamma) = g(\min_n g(n, \gamma) \leq 1, \gamma)$$

calcule, à partir du codage d'une configuration γ, le codage de la configuration finale de la machine (si elle existe) correspondant à un calcul commençant par la configuration dont le code est γ.

On déduit alors que la fonction calculée est récursive, car le codage et le décodage d'une configuration sont récursives.

Enfin, remarquons que dans ces constructions, le calcul de la machine sur la donnée D se termine si et seulement si la fonction récursive correspondante est définie sur la donnée D.

Corollaire 3.10 (Kleene) *Toute fonction récursive partielle s'obtient à l'aide d'une seule minimisation d'une fonction primitive récursive.*

3.3 Théorèmes d'incomplétude (Gödel)

Un des premiers objectifs est de montrer que les fonctions récursives sont représentables dans une théorie T minimale de l'arithmétique. Alors, d'après le lemme 3.1, l'ensemble des théorèmes n'est pas récursif et donc la théorie est ou bien incohérente ou bien incomplète.

On peut déjà noter que le résultat d'incomplétude est, d'une manière générale, déjà acquis ; Soit $Th(\mathbb{N})$ les énoncés du premier ordre sur l'alphabet $*, +, 0, 1, =, \geq$ et qui sont valides dans les entiers.

Théorème 3.11 $Th(\mathbb{N})$ *n'est pas récursivement énumérable.*

Preuve
En effet, s'il était récursivement énumérable, il serait aussi co-récursivement énumérable

$$
\begin{array}{rc}
\forall x. & s(x) \neq 0 \\
\forall x, y. & s(x) = s(y) \Rightarrow x = y \\
\forall x. & x + 0 = x \\
\forall x, y. & x + s(y) = s(x + y) \\
\forall x. & x \times 0 = 0 \\
\forall x, y. & x \times s(y) = (x \times y) + x \\
\forall x. & x \neq 0 \Rightarrow \exists y. x = s(y)
\end{array}
$$

FIG. 2 – Axiomes de l'arithmétique élémentaire

puisque l'ensemble des négations des énoncés non-valides serait récursivement énumérable. Il en résulte que $Th(\mathbb{N})$ serait récursif. De plus, les fonctions récursives sont représentables dans $Th(\mathbb{N})$. En effet, d'après le théorème 3.8, il suffit de montrer que les fonctions de $\mathcal{C}$ sont représentables. Les fonctions initiales sont trivialement représentables. Il suffit de montrer que les fonctions représentables dans $Th(\mathbb{N})$ sont closes par minimisation et composition. Pour la composition,soit $g(\vec{x}) = f(h_1(\vec{x}), \ldots, h_k(\vec{x}))$. Si $\phi_f, \phi_{h_1}, \ldots, \phi_{h_k}$ sont les formules représentant $f, h_1, \ldots, h_k$ resp. alors soit

$$\phi_g(\vec{x}, y) \stackrel{\text{def}}{=} \exists z_1, \ldots, z_k.\phi_f(z_1, \ldots, z_k, y) \wedge \phi_{h_1}(\vec{x}, z_1) \wedge \ldots \wedge \phi_{h_k}(\vec{x}, z_k)$$

Pour tous entiers $\vec{n}, m$, $\phi_g(\vec{n}, m) \in Th(\mathbb{N})$ ssi il existe des entiers $p_1, \ldots, p_k$ tels que $\phi_f(p_1, \ldots, p_k, m)$, $\phi_{h_1}(\vec{n}, p_1), \ldots, \phi_{h_k}(\vec{n}, p_k) \in Th(\mathbb{N})$. Par hypothèse de récurrence, ces formules sont dans la théorie ssi $m = f(p_1, \ldots, p_k)$, $p_1 = h_1(\vec{n}), \ldots, p_k = h_k(\vec{n})$. Et donc ssi $m = g(\vec{n})$.

Pour la minimisation, soit $g(\vec{x}) = \min_y(f(\vec{x}, y) = 0)$. On définit alors

$$\phi_g(\vec{x}, z) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_f(\vec{x}, z, 0) \wedge \forall y, \forall y'((y < z) \wedge \phi_f(\vec{x}, y, z')) \Rightarrow z' > 0$$

À nouveau, on obtient que ϕ_g représente g dans $Th(\mathbb{N})$.

Alors, par le lemme 3.1, l'ensemble des théorèmes de $Th(\mathbb{N})$ n'est pas récursif. Mais $Th(\mathbb{N})$ est cohérente et contient tous ses théorèmes. Donc $Th(\mathbb{N})$ n'est pas récursive. Contradiction.

De cette preuve, on déduit aussi que :

Corollaire 3.12 *Il n'existe pas d'axiomatisation récursive T telle que $Th(\mathbb{N})$ est l'ensemble des théorèmes de T.*

Autrement dit : il existe des énoncés vrais non démontrables dans les entiers.

On peut faire plus de deux façons : d'abord montrer que toute axiomatisation récursive contenant au moins les axiomes de l'arithmétique élémentaire est incohérente ou incomplète. Autrement dit, ce n'est pas un problème particulier aux énoncés de l'arithmétique. Cette arithmétique "élémentaire" est constituée des axiomes de la figure 2