3 Fonctions récursives

3.1 Introduction

L'objectif de cette partie est d'abord de voir un autre modèle de calcul que les machines de Turing et de montrer qu'il a le même pouvoir expressif que les machines de Turing (donc d'apporter un témoin à la thèse de Church). L'autre objectif est de montrer les théorèmes d'incomplétudes dus à Gödel. Pour ces derniers, nous avons besoins de résultats qui relèvent de la logique et que nous allons énoncer ici.

Nous considérerons des *théories logiques*, définies d'une part par un ensemble récursif de formules (axiomes) et un ensemble récursif de *règles d'inférences*. Ces règles sont des relations récursives sur l'ensemble des formules. Des exemples typiques sont :

$$\frac{\phi \Rightarrow \psi \quad \phi}{\psi} \qquad \frac{\forall x.\phi}{\phi\{x \mapsto t\}}$$

où ϕ, ψ sont des formules arbitraires, t un terme arbitraire et $\{x \mapsto t\}$ est le remplacement de la variable libre x par t, suppose qu'il n'y a pas de capture (voir cours de logique). Les formules au dessus de la barre d'inférence sont les *prémisses* et la formule au dessous de la barre d'inférence est la *conclusion*. La relation définie par la première règle ci-dessus est donc par exemple une relation ternaire $\{(\phi \Rightarrow \psi, \phi, \psi) \mid \phi, \psi \text{formules}\}$.

Une *preuve* d'une formule ϕ est une suite de formules $\phi_1, \ldots, \phi_n = \phi$ telles que, pour tout i, ou bien ϕ_i est dans l'ensemble des axiomes, ou bien ϕ_i s'obtient par application d'une règle d'inférence dont les prémisses appartiennent à $\{\phi_1, \ldots, \phi_{i-1}\}$. Comme l'ensemble des axiomes est récursif, ainsi que l'ensemble des règles d'inférence et chacune des relations définies par les règles d'inférence,l'ensemble des preuves est récursivement énumérable.

Un *théorème* de la théorie T est un énoncé (formule) ϕ dont il existe une preuve dans T, ce que l'on note $T \vdash \phi$. L'ensemble des théorèmes est récursivement énumérable.

On peut aussi coder les formules dans les entiers (comme on a codé les machines de Turing). On peut coder de même les preuves dans les entiers de telle manière que les prédicats sur les entiers "n code une formule" et "n code une preuve" soient récursifs.

Nous nous interesserons essentiellement à des théories de l'arithmétique. Une fonction f est *représentable* dans une théorie T de l'arithmétique s'il existe une formule ϕ_f telle que, pour tout vecteur d'entiers $\vec{n}$ et tout entier m,

- $f(\vec{n}) = m$ entraine $T \vdash \phi_f(\vec{n}, m)$
- $f(\vec{n}) \neq m$ entraine $T \vdash \neg\phi_f(\vec{n}, m)$

Une théorie T est *cohérente* s'il n'y a pas de théorème de la forme $\phi \wedge \neg\phi$. Si T est cohérente, on peut remplacer les implications par des équivalences dans la définition de représentabilité ci-dessus.

Les théorèmes d'incomplétude sont basés sur la représentabilité des fonctions récursives dans des théories de l'arithmétique. En effet :

Lemme 3.1 *Si les fonctions récursives sont représentables dans T, et si T est cohérente, alors l'ensemble des théorèmes de T n'est pas récursif.*

Preuve

On note $< \phi >$ le code de la formule ϕ et $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ une formule dont les variables libres sont $x_1, \ldots .x_n$. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'ensemble des théorèmes soit récursif. Soit

$$P = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists \phi . n =< \phi(x) > \& T \vdash \phi\{x \mapsto m\}\}$$

P est alors récursif. Donc l'ensemble suivant aussi :

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid (n, n) \notin P\}$$

Comme les fonctions récursives sont représentables, il existe une formule $\psi(x)$ telle que $T \vdash \psi\{x \mapsto n\}$ ssi $n \in E$. Mais alors on considère $\theta = \psi\{x \mapsto < \psi >\}$.

$$T \vdash \theta \Leftrightarrow < \psi > \in E \Leftrightarrow (< \psi >, < \psi >) \notin P \Leftrightarrow T \not\vdash \theta$$

Ce qui est absurde. (Noter qu'on utilise la cohérence pour avoir les équivalences).

Ceci permet de montrer l'incomplétude, c'est à dire l'existence de formules qui sont valides (dont l'interprétation dans les entiers est vraie) mais qui ne sont pas des théorèmes : en effet, pour toute formule close (sans variable libre) ϕ, l'une des deux formules ϕ ou $\neg\phi$ est vraie. Si toute formule vraie était prouvable, l'ensemble des théorèmes serait récursivement énumérable et co-récursivement énumérable et donc récursif, ce qui contredit le résultat ci-dessus :

Corollaire 3.2 *Si les fonctions récursives sont représentables dans une théorie T de l'arithmétique et si T est cohérente, alors il existe des énoncés, valides sur les entiers et qui ne sont pas des théorèmes.*

Nous verrons plus loin la construction d'un énoncé particulier qui n'est pas prouvable dans l'arithmétique : cet énoncé exprime dans l'arithmétique la cohérence de l'arithmétique.

Il nous reste donc a montrer que les fonctions récursives sont représentables dans une théorie de l'arithmétique. Il y en a plusieurs

3.2 Fonctions récursives primitives

f désignera une fonction de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$. Les fonctions totales sont aussi des *applications.* $f(n_1, \ldots, n_k) = \perp$ si f n'est pas définie en $n_1, \ldots, n_k$.

Les *fonctions initiales* sont

- les projections $P^i_k : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N}$. $P^i_k(n_1, \ldots, n_k) = n_i$
- le successeur $S(n) = n + 1$
- la fonction nulle $Z(n) = 0$
- la fonction constante 0 (à 0 arguments).

Un ensemble d'applications F est *fermé par composition* si, pour toutes fonction $\xi : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N}$ et $\psi_1, \ldots, \psi_m : \mathbb{N}^n \mapsto \mathbb{N}$, la fonction $\phi : \mathbb{N}^n \mapsto \mathbb{N}$ définie par $\phi(\vec{n}) = \xi(\psi_1(\vec{n}), \ldots, \psi_m(\vec{n}))$ est dans F. On note $\mathsf{Comp}_m(\xi, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ la fonction ϕ ainsi obtenue.

Un ensemble d'applications F est *fermé par récursion primitive* si, pour toutes fonctions $\xi, \psi \in F$, la fonction ϕ définie par récurrence par :

$$\phi(m, \vec{n}) = \begin{cases} \xi(\vec{n}) & \text{si } m = 0 \\ \psi(\phi(m-1, \vec{n}), m-1, \vec{n}) & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

est dans F. On note $\mathsf{Prim}(\xi, \psi)$ la fonction ϕ ainsi obtenue.

Definition 3.1 *L'ensemble des* fonctions récursives primitives *est le plus petit ensemble contenant la constante 0, les fonctions initiales, clos par composition et récursion primitive.*

Toutes les fonctions récursives primitives s'obtiennent ainsi à partir de fonctions de base et des opérations Prim et Comp_n.

Exemple 3 $f(n, m) = n + m$ *est primitive récursive :* $f = \mathsf{Prim}(P_1^1, \mathsf{Comp}_1(S, P_3^1)).$
$g(n, m) = n * n$ *est primitive récursive :* $g = \mathsf{Prim}(Z, \mathsf{Comp}_2(+, P_3^1, P_3^3))$

Exercice 1
Montrer que les fonctions suivantes sont récursives primitives (les prédicats sont vus comme des fonctions à valeur dans $\{0, 1\}$.

1. la factorielle
2. le test d'égalité

Exercice 2
F est *clos par maximisation bornée* si, pour toutes fonctions $\xi, \psi \in F$ telles que

$$\forall \vec{n}, \exists m \leq \psi(\vec{n}).\xi(\vec{n}, m) = 0$$

la fonction ϕ définie par :

$$\phi(\vec{n}) = \max_{m \leq \psi(\vec{n})} (\xi(\vec{n}, m) = 0)$$

est dans F.

Montrer que l'ensemble des fonctions récursives primitives est fermé par maximisation bornée.

Exercice 3
Montrer que, comme dans l'exercice précédent, l'ensemble des fonctions récursives primitives est clos par minimisation bornée.

3.2.1 Hiérarchie de Grzegorczyk

On définit par récurrence sur n la suite de fonctions primitives récursives comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \psi_0(m) & = & m + 1 \\ \psi_{n+1}(0) & = & \psi_n(1) \\ \psi_{n+1}(m+1) & = & \psi_n(\psi_{n+1}(m)) \end{array}$$

On montre par récurrence sur n qu'il s'agit bien d'une suite de fonctions récursives primitives. Par récurrence sur m, on montre successivement les résultats suivants pour les premières fonctions de la hiérarchie :

$\psi_1(m) = m + 2$

$\psi_2(m) = 2m + 3$

$\psi_3(m) = 2^{m+3} - 3$

$$\psi_4(m) = {}^{m+3}\left\{ 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} \right. - 3$$

Exercice 4
Montrer que :

1. Pour tous n, m, $\psi_n(m) \geq 1$
2. Les fonctions ψ_k sont croissantes pour tout k
3. Pour tous n, m, k, $\psi_n(m) + k \leq \psi_{n+k}(m)$

Lemme 3.3 *Pour tous k, m, n, $\psi_k(\psi_m(n)) \leq \psi_{2+\max(k,m)}(n)$.*

Preuve
On utilise les résultats de l'exercice 4 sans mention. Soit $M = \max(k, m)$.

$$\begin{array}{rcll} \psi_k(\psi_m(n)) & \leq & \psi_M(\psi_{M+1}(n)) & \\ & \leq & \psi_{M+1}(n+1) & \\ & \leq & \psi_{M+1}(\psi_1(n-1)) & \text{Si } n > 0 \\ & \leq & \psi_{M+1}(\psi_{M+2}(n-1)) & \\ & \leq & \psi_{M+2}(n) & \end{array}$$

et, si $n = 0$, $\psi_{M+1}(n+1) \leq \psi_{M+2}(0)$ et on a encore l'inégalité.

Proposition 3.4 *Pour toute fonction récursive primitive à un argument ξ, il existe une fonction de la hiérarchie de Grzegorczyk ψ_n telle que*

$$\forall m \xi(m) \leq \psi_n(m)$$

Preuve
On prouve par récurrence sur le nombre d'opérations utilisées dans la construction des fonctions primitives récursives que, si ϕ est primitive récursive, alors il existe un k_ϕ tel que $\phi(\vec{n}) \leq \psi_{k_\phi}(\max \vec{n})$. (utilisation du théorème de point fixe ...).

– C'est vrai pour les fonctions initiales : $P^i_k(\vec{n}) \leq \psi_0(\max \vec{n})$, $S(n) \leq \psi_0(n)$, $Z(n) \leq \psi_0(n)$.
– Si ϕ est obtenue par composition de $\xi, \phi_1, \ldots, \phi_m$, il suffit de choisir

$$k_\phi = 2 + \max(k_\xi, k_{\phi_1}, \ldots, k_{\phi_n}),$$

en utilisant l'exercice 4.
– Si ϕ est obtenue par récursion primitive :

$$\phi(m, \vec{n}) = \begin{cases} \xi(\vec{n}) & \text{Si } m = 0 \\ \psi(\phi(m-1, \vec{n}), m-1, \vec{n}) & \text{Si } m > 0 \end{cases}$$

On montre par récurrence sur m que $\phi(m, \vec{n}) \leq \psi^m_{k_\psi}(\psi_{k_\xi}(\max(\vec{n})))$ Si $m = 0$, alors $\phi(0, \vec{n}) = \xi(\vec{n}) \leq \psi_{k_\xi}(\max(\vec{n}))$ par hypothèse de récurrence.
Si $m > 0$, par hypothèse de récurrence,

$$\phi(m-1, \vec{n}) \leq \psi^{m-1}_{k_\psi}(\psi_{k_\xi}(\max(\vec{n}))).$$

Par croissance de ψ_{k_ψ} et comme $\psi^m_{k_\psi}(n) \geq n + m$, on a aussi

$$\begin{array}{rcl} \phi(m, \vec{n}) & \leq & \psi_{k_\psi}(\max(\psi^{m-1}_{k_\psi}(\psi_{k_\xi}(\max(\vec{n}))), m-1, \vec{n})) \\ & \leq & \psi_{k_\psi}(\psi^{m-1}_{k_\psi}(\psi_{k_\xi}(\max(\vec{n})))) \end{array}$$

Par ailleurs, $\psi_k^m(n) \leq \psi_{k+1}(n+m)$ (par récurrence sur m), donc

$$\phi(m, \vec{n}) \leq \psi_{1+k_\psi}(m + \psi_{k_\xi}(\max(\vec{n})))$$

Il suffit d'utiliser alors le résultat sur la composition.

La *fonction d'Ackermann* est la fonction à deux arguments $A(n, m) = \psi_n(m)$.

Théorème 3.5 *La fonction d'Ackermann n'est pas récursive primitive.*

Preuve
Si cette fonction était récursive primitive, d'après la proposition 3.4, il existerait un entier k tel que, pour tout n, $A(n, n) \leq \psi_k(n)$. Mais en choisissant $n = k+1$, on obtient $\psi_{k+1}(k+1) \leq \psi_k(k+1)$, ce qui contredit le résultat de l'exercice 4.

Exercice 5
Montrer que la fonction J :

$$J(x, y) = x + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$$

est une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. On note $(K(z), L(z)) = J^{-1}(z)$.

Montrer que $J, K, L \in \mathcal{C}$.

Exercice 6
Soit $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ la suite des nombres premiers et C l'application qui à une suite finie d'entiers $k_0, \ldots, k_n$ associe $p_0^{k_0+1} \times \cdots \times p_n^{k_n+1}$. C est une injection de l'ensemble des suites finies d'entiers dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que la fonction D définie par :

$$D(i, k) = \begin{cases} r_i + 1 & \text{Si } \exists n.\ k = C(J(0, r_0), \ldots, J(n, r_n)) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   est récursive primitive.

2. Soit A' la fonction définie par :

$$A'(n, m, k) = \begin{cases} m + 1 & \text{Si } n = 0 \\ D(J(n-1, 1), k) & \text{Si } n > 0,\ m = 0 \\ D(J(n-1, D(J(n, m-1), k)), k) & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer que A' est récursive primitive.

3. Montrer que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$
   (a) si k est tel que $D(J(n, m), k) \neq 0$, alors $A(n, m) = A'(n, m, k)$
   (b) il existe un entier k tel que $D(J(n, m), k) \neq 0$.

4. En déduire qu'il existe une fonction récursive primitive ϕ telle que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$A(n, m) = \min\{x \in \mathbb{N} \mid \phi(n, m, x) = 0\}$$

Exercice 7
Si h est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ on appelle *itération de h* la fonction $f(n, x)$ définie par :

$$f(n,x) = \begin{cases} x & \text{si } n = 0 \\ h(f(n-1,x)) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que la plus petite classe de fonctions sur les entiers qui contient les fonctions de base, les fonctions J, K, L et qui est close par itération, coïncide avec l'ensemble des fonctions récursives primitives.

Exercice 8
Montrer qu'il existe une fonction non récursive primitive dont le graphe est récursif primitif. (Le graphe de f est l'ensemble des paires $(n, f(n))$)