

Automates avancés - TD6

Exercice 1 Les automates à pile définis en cours permettent les opérations dans $Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \times Q \times \Gamma_\epsilon$. Il y a quatre cas:

- $(q, _, A, q', B)$: changer le haut de pile
- $(q, _, A, q', \epsilon)$: dépiler
- $(q, _, \epsilon, q', B)$: empiler
- $(q, _, \epsilon, q', \epsilon)$: rien faire sur la pile

Montrez comment on peut simuler avec ces opérations l'opération plus complexe $(q, _, A, q', \alpha)$ qui signifie qu'on remplace A en haut de la pile par $\alpha \in \Gamma^*$.

Exercice 2 Soient M_1 et M_2 deux automates à pile.

- Montrez qu'il y a un automate à pile M' avec $L(M') = L(M_1)L(M_2)$.

Exercice 3 Un automate à pile est déterministe si pour chaque configuration il y a au plus une configuration qui peut la succéder dans un calcul de l'automate.

- Donnez un automate à pile déterministe pour le langage $\{0^n 1^n : n \geq 1\}$.
- Peut-on donner un automate déterministe pour le langage $L_1 = 0^* \cup \{0^n 1^n : n \geq 1\}$?

Pour résoudre ce problème on considère que l'automate à pile peut détecter la fin du mot (appelé $\$ \notin \Sigma$). On appelle un langage $L \subseteq \Sigma^*$ hors-contexte déterministe si $L\$ = L(M)$ pour un automate à pile déterministe M .

- Donnez un automate à pile déterministe M_1 pour le langage $L_1\$$.

Exercice 4 Le but de cet exercice est de montrer que la classe des langages hors-contextes déterministes est fermée par complément. On considère les automates à pile, où pour accepter un mot, l'automate doit être dans un état final **et** la pile doit être vide.

- Uniquement renverser les états accepteurs avec les états non-accepteurs ne marche pas. Pourquoi ?

Un triplet (q, a, A) avec $q \in Q$, $a \in \Sigma$ et $A \in \Gamma$ est appelé impasse, si on n'a ni $(q, A) \xrightarrow{\epsilon}^* (q', \epsilon)$ ni $(q, A) \xrightarrow{\epsilon}^* \xrightarrow{a} \xrightarrow{\epsilon}^* (q', \alpha)$ avec $\alpha \in \Gamma^*$.

On suppose qu'on connaît les impasses.

- Donnez un algorithme pour "compléter" un automate à pile en utilisant la notion d'impasse.
- Appliquez l'algorithme à l'automate M_1 .

Exercice 5 Montrez que les langages suivants sont hors-contextes déterministes.

- $\{a^m b^n \mid m \neq n\}$
- $\{a^m c b^m \mid m \neq n\} \cup \{a^m d b^{2m} \mid m \geq 0\}$