Master Parisien de Recherche en Informatique 2007–2008
Assistants de Preuve

TD/TP 3 - Programmation fonctionnelle

Mardi 11 décembre 2007

1 Récursion

1.1 Schémas récursifs sur les entiers

On cherche à définir la fonction Fibonacci `fib` qui vérifie :
$fib\,0 = 0 \;\; fib\,1 = 1 \; fib\,(n+2) = fib\,n + fib\,(n+1)$

1. Prouver le principe suivant de deux manières diférentes :

$$\forall P : nat \to \texttt{Type}, P\,0 \to P\,1 \to (\forall n, P\,n \to P\,(\texttt{S}\,n) \to P\,(\texttt{S}\,(\texttt{S}\,n))) \to \forall n, P\,n$$

   (a) avec une construction **Fixpoint** structurel sur n établissant $P\,n$
   (b) avec une construction analogue établissant d'abord $P\,n * P\,(\texttt{S}\,n)$
2. Utiliser ce principe pour construire la fonction `fib`. Quelle est la complexité de la fonction ainsi construite dans les deux cas ?

1.2 Récursion sur les listes

1. Définir une fonction `split` qui étant donnée une liste l sépare les éléments de l en 2 listes l_1 et l_2 dont la longueur diffère au plus de 1.
2. Montrer que si la longueur de l est plus grande que 2 alors la longueur de l_i est strictement inférieur à la longueur de l.
3. En utilisant la fonction `merge` vue en cours et la fonction `split` précédente, écrire une fonction effectuant un tri par fusion.

1.3 Fonction partielle

On s'intéresse à un schéma de définition récursive sur les entiers relatifs

$$\textbf{let rec } f\ n\ m = \textbf{if } n = m \textbf{ then } t \textbf{ else } F\ n\ m\ (f\ n\ (m-1))$$

1. Pour quelles valeurs de n et m cette fonction est-elle bien définie ?
2. Décrire inductivement le domaine de définition de f
3. Définir la fonction f en utilisant un point fixe structurel sur le domaine de définition.

2 Types coinductifs

1. Définir un type coinductif `natw` pour les entiers potentiellement infinis (avec `O` et `S`)
2. Définir l'entier infini `omega` et prouver $\texttt{omega} = \texttt{S}\,\texttt{omega}$
3. Définir un ordre sur `natw` tel que

$$O \leq x \qquad \frac{x \leq y}{\texttt{S}\,x \leq \texttt{S}\,y}$$

4. Montrer que $\forall x, x \leq \texttt{omega}$.