

MPRI 2-7-1
Fondements des systèmes de preuves

Gilles Dowek et Alexandre Miquel

Mardi 20 Novembre

Durée 2h.
Tous documents autorisés.

1

(3 pts)

- (a) Donner une démonstration sans coupures en déduction naturelle de la proposition $((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow A$.
- (b) Exprimer cette démonstration par un terme du λ -calcul.
- (c) Quel est le λ -calcul le plus simple qui permet d'exprimer cette démonstration ?

2

(4 pts)

On se place en logique minimale dans le langage formé d'une constante c , d'un symbole de fonction unaire f et d'un symbole de prédicat unaire P . On représente les démonstrations dans le $\lambda\Pi$ -calcul.

- (a) Montrer qu'un terme bien typé et normal du $\lambda\Pi$ -calcul a la forme $Type$, $\Pi x : A B$, $\lambda x : A u$ ou $(x u_1 \dots u_p)$.
- (b) Montrer qu'il n'y a pas de terme clos de type $P(f(t))$ dans le contexte $T : Type, c : T, f : T \rightarrow T, P : T \rightarrow Type, x_1 : T, \dots, x_n : T, \alpha : P(t)$.
- (c) Montrer que séquent $P(t) \vdash P(f(t))$ n'est pas démontrable en déduction naturelle intuitionniste.
- (d) Montrer que le séquent $\vdash P(t) \Rightarrow P(f(t))$ n'est pas démontrable en déduction naturelle intuitionniste. Montrer que le séquent $\vdash \exists x (P(x) \Rightarrow P(f(x)))$ n'est pas démontrable en déduction naturelle intuitionniste.

3

(2 pts)

Soit m un terme du système T exprimant calculatoirement la multiplication, donner un terme du système T exprimant calculatoirement la fonction factorielle.

4

(4 pts)

On considère une fonction $\ulcorner \urcorner$ qui à chaque terme t du système T de type $nat \rightarrow nat$, associe un entier $\ulcorner t \urcorner$. On suppose qu'il existe un terme I du système T tel que la forme normale de $(I \ulcorner t \urcorner n)$ soit la forme normale de $(t n)$.

- (a) Quel serait le type du terme I ?
- (b) Et celui du terme $u = \lambda x (S (I x x))$?
- (c) Quel serait la forme normale de $(I \ulcorner u \urcorner \ulcorner u \urcorner)$?
- (d) Donner un exemple de fonction calculable et totale de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans \mathbb{N} qui n'est pas exprimable dans le système T .

5

(4 pts)

Soit t un terme dans la théorie des types de Martin-Löf de type

$$\forall x \exists y ((\neg x = 0) \Rightarrow x = S(y))$$

- (a) Quelle est la forme normale du terme $(\pi_1 (t 5))$ où π_1 est la première projection ?
- (b) Quelle est la forme normale du terme $(\pi_1 (t 0))$?

6

(3 pts)

Donner un exemple de terme du λ -calcul qui n'est pas typable dans le système F .