COURS 22

Résolution d'équations différentielles linéaires

NOTES DE BRUNO SALVY

Résumé

Les solutions polynomiales ou rationnelles d'équations différentielles linéaires s'obtiennent en utilisant des développements en série et la structure des ensembles de séries solutions.

L'objectif de ce cours est de décrire des algorithmes permettant de calculer les solutions rationnelles d'une équation de la forme

$$Ly(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)}(x) = 0, \tag{1}$$

où les coefficients a_k, $k = 0, \ldots, n$ sont des polynômes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. De manière équivalente (voir §1), ces algorithmes permettront de résoudre le système

$$Y'(x) = A(x)Y(x), \tag{2}$$

où $A(x)$ est une matrice de fractions rationnelles de $\mathbb{K}(x)$ et Y un vecteur.

Ces algorithmes seront utilisés dans un cours ultérieur pour le calcul d'intégrales définies.

1. Système et équation

L'équivalence entre équation linéaire d'ordre n et système linéaire d'ordre 1 sur des vecteurs de taille n est classique. Nous détaillons les calculs en jeu.

L'équation (1) est transformée en une équation de la forme (2), en posant $Y = (y_0, \ldots, y_{n-1})$ où $y_i = y^{(i)}$ pour $i = 0, \ldots, n-1$. La matrice A est alors une matrice compagnon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & \ldots & \ldots & \ldots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

À l'inverse, pour toute matrice A intervenant dans un système de type (2), une équation différentielle de type (1) peut être obtenue pour n'importe quelle combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ des coordonnées d'une solution Y. En effet, les dérivées successives $Y, Y', Y'', \ldots$ sont des vecteurs dans un espace de dimension n où n est la dimension de la matrice. Il existe donc un $k \leq n$ tel que $Y, \dots, Y^{(k)}$ soient liés sur $\mathbb{K}$. Multiplier à gauche par un vecteur constant donne l'équation cherchée.

Exercice 1. Trouver une équation différentielle linéaire satisfaite par y_1 solution de

$$y_1' = xy_1 - y_2, \quad y_2' = y_1 - xy_2.$$

2. Solutions séries et singularités

Avant de rechercher le développement en série de solutions de l'équation (1) ou du système (2), il est utile de localiser les singularités. Le point de départ est une version du théorème de Cauchy sur les équations différentielles :

Théorème 1. *Si $A(x)$ est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^{n\times n}$ analytique dans une région simplement connexe R du plan complexe, alors l'équation*

$$Y'(x) = A(x)Y(x)$$

possède une unique solution telle que $Y(\alpha) = U$ pour tout $\alpha \in R$ et $U \in \mathbb{C}^n$. Cette solution est analytique dans R.

L'application de ce résultat à l'équation (2) montre qu'en tout point où A est analytique (développable en série entière), il existe une base de solutions séries entières convergentes. Au vu de la matrice compagnon (3), il en va de même pour les solutions de l'équation (1) en tout point où le coefficient de tête a_n est non-nul. *A contrario*, les seuls points où les solutions peuvent ne pas admettre de solution série sont les racines de a_n.

Definition 1. On dit que $\alpha \in \mathbb{C}$ est un point *ordinaire* de l'équation (1) si $a_n(a) \neq 0$. On dit qu'il est *singulier* dans le cas contraire.

Exemple 1. La fraction rationnelle $y = 1/(1-x)$ est solution de l'équation

$$(1-x)y'(x) - y(x) = 0.$$

Le complexe 1 est singularité de la solution et donc nécessairement point singulier de l'équation, ce qui s'y traduit par l'annulation du coefficient de tête.

Exemple 2. Le polynôme x^{10} est solution de l'équation

$$10xy'(x) - y(x) = 0.$$

La solution n'a pas de point singulier à distance finie, mais le complexe 0 est point singulier de l'équation ; le théorème de Cauchy ne s'y applique pas.

Une autre conséquence utile de ce théorème est que les fonctions D-finies ne peuvent avoir qu'un nombre fini de singularités (les racines du coefficient de tête). Il s'en déduit des résultats négatifs.

Exemple 3. La fonction $1/\sin x$ ne satisfait pas d'équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux.

Exemple 4. La suite des nombres de Bernoulli, qui interviennent en particulier dans la formule d'Euler-Maclaurin, ne peut être solution d'une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux, puisque la série génératrice exponentielle

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{\exp(z)-1}$$

a une infinité de pôles (aux $2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}^\star$).

Le théorème ci-dessus entraîne aussi la possibilité de développer les solutions en série. Soit

$$\lambda := \min_k(\mathrm{val}(a_k) - k), \quad \mu := \max_k(\deg(a_k) - k),$$

où $\mathrm{val}(p(x))$ désigne le plus grand entier m tel que x^m divise $p(x)$, que l'on appelle la *valuation* de p. Alors les coefficients de l'équation (1) se récrivent

$$a_k(x) = \sum_{i=\lambda}^{\mu} a_{k,i}x^{i+k}.$$

Ceci permet de définir les polynômes

$$u_i(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,i}x(x-1)\cdots(x-k+1),$$

de sorte que si $y = \sum_{m=-K}^{\infty} y_i x^i$ $(K \in \mathbb{Z})$ est une série de Laurent solution de (1), ses coefficients satisfont la récurrence

$$u_\lambda(i-\lambda)y_{i-\lambda} + \cdots + u_\mu(i-\mu)y_{i-\mu} = 0 \tag{4}$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$ (les y_i d'indice inférieur à $-K$ sont supposés nuls).

Definition 2. Le polynôme u_λ s'appelle *polynôme indiciel* de l'équation (1) à l'origine ; le polynôme u_μ est son *polynôme indiciel à l'infini.*

En changeant la variable x en $x + \alpha$ dans l'équation, le même calcul fournit deux polynômes. C'est un exercice de montrer que le polynôme indiciel à l'infini est inchangé. L'autre s'appelle le polynôme indiciel en α.

Proposition 1. *Si* 0 *est un point ordinaire pour l'équation* (1)*, alors pour tout* $U = (u_0, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$*, les coefficients du développement en série de la solution* y *de* (1) *telle que* $y^{(k)}(0) = u_k$*,* $k = 0, \dots, n-1$ *sont donnés par la récurrence linéaire* (4).

Démonstration. Il suffit de prouver que le coefficient de tête de la récurrence, à savoir $u_\lambda(i-\lambda)$, ne s'annule pas pour $i - \lambda = n, n+1, \dots$, ce qui permet alors le calcul de'$y_{i+\lambda}$ à partir des précédents. En effet, lorsque l'origine est ordinaire, le coefficient a_n est tel que $a_n(0) \neq 0$ et donc $\mathrm{val}(a_n) - n = -n$ est minimal. Donc $\lambda = n$ et $u_\lambda(x) = a_n(0)x(x-1)\cdots(x-n+1)$, ce qui permet de conclure. □

En effectuant le changement de variable $x \mapsto x + \alpha$, le même raisonnement s'applique à tout point α ordinaire.

3. Solutions polynomiales

S'il existe une solution polynomiale de degré N, l'équation (4) avec $i - \mu = N$ montre que $u_\mu(N) = 0$. Ceci fournit un procédé pour trouver les degrés possibles des solutions polynomiales.

Supposons d'abord que l'origine est un point ordinaire de l'équation. Alors une solution polynomiale est une solution dont le développement en série n'a que des coefficients nuls à partir du degré N. D'après la récurrence (4), il suffit que les coefficients des degrés $N+1$ à $N+\mu-\lambda$ le soient. L'idée est alors de constater que cette observation se ramène à un calcul d'algèbre linéaire. Voici le détail de l'algorithme :

1. Calculer la récurrence (4) ;
2. Calculer la plus grande racine entière positive N de u_μ. Si N n'existe pas, il n'existe pas de solution polynomiale non-nulle ;
3. Pour $0 \leq i \leq n-1$, utiliser la récurrence pour calculer une série solution
$$y_i = x^i + \sum_{j=n}^{N+\mu-\lambda} y_{i,j}x^j + O(x^{N+\mu-\lambda+1});$$
4. Former la matrice $M = [y_{i,j}]$, $0 \leq i < n$, $N+1 \leq j \leq N+\mu-\lambda$;
5. Calculer une base B du noyau de la transposée M^t ;
6. L'ensemble des $c_0y_0 + \cdots + c_{n-1}y_{n-1}$ pour $(c_0, \ldots, c_{n-1})$ dans B forme une base de l'espace des solutions polynomiales.

Si l'origine n'est pas un point ordinaire de l'équation, il n'est pas garanti que la récurrence (4) permette de calculer les séries solutions. Deux approches sont alors possibles : soit on étend les calculs précédents pour s'adapter au cas singulier, soit, plus simplement, on trouve un point ordinaire (il y en a au moins un parmi $0, 1, \ldots, \deg(a_n)$ et on effectue les calculs en ce point.

4. Solutions rationnelles

Les solutions rationnelles ne peuvent avoir de pôle (zéro de leur dénominateur) qu'en une singularité de l'équation. De la même manière que pour les degrés des solutions polynomailes, les multiplicités possibles des pôles sont données par les racines entières négatives du polynôme indiciel en ces singularités. Ceci conduit à un algorithme simple, essentiellement dû à Liouville, pour calculer les solutions rationnelles de (1).

1. En toute racine α de a_n :
   - calculer le polynôme indiciel $p_\alpha(n)$;
   - calculer la plus petite racine entière négative N_α de p_α, s'il n'en existe pas, faire $N_\alpha := 0$;
2. Former le polynôme $P = \prod_{a_n(\alpha)=0}(x-\alpha)^{-N_\alpha}$;
3. Effectuer le changement de fonction inconnue $y = Y/P$ et réduire au même dénominateur ;
4. Chercher une base B des solutions polynomiales de cette nouvelle équation. Une base des solutions rationnelles est formée des fractions $\{b/P, b \in B\}$.

La preuve de l'algorithme se réduit à observer que P est un multiple du dénominateur de toute solution rationnelle.

Cet algorithme permet également de trouver les solutions rationnelles du système (2), en se ramenant à une équation. Il existe aussi d'autres algorithmes plus directs.

Notes

Les idées de base de l'algorithme de recherche de solutions rationnelles sont dues à Liouville [3] qui donne également une méthode par coefficients indéterminés pour trouver les solutions polynomiales. La présentation qui utilise les récurrences donne un algorithme de même complexité mais fait mieux ressortir la structure du calcul [1].

La recherche de solutions d'équations différentielles linéaires ne s'arrête pas aux solutions rationnelles. En utilisant la théorie de Galois différentielle, il existe une algorithmique sophistiquée de recherche de solutions *liouvilliennes* (c'est-à-dire formées par l'application répétée d'exponentielles, d'intégrales et de prise de racines de polynômes). Les calculs se ramènent à la recherche présentée ici de solutions rationnelles pour des équations (les puissances symétriques) formées à partir de l'équation de départ [**4, 5, 6**].

Bibliographie

[1] Abramov (Sergei A.), Bronstein (Manuel), and Petkovšek (Marko). – On polynomial solutions of linear operator equations. In Levelt (A. H. M.) (editor), *Symbolic and Algebraic Computation*. pp. 290–296. – ACM Press, New York, 1995. Proceedings of ISSAC'95, July 1995, Montreal, Canada.

[2] Ince (E. L.). – *Ordinary differential equations*. – Dover Publications, New York, 1956, viii+558p. Reprint of the 1926 edition.

[3] Liouville (Joseph). – Second mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique. *Journal de l'École polytechnique*, vol. 14, 1833, pp. 149–193.

[4] Marotte (F. M.). – *Les équations différentielles linéaires et la théorie des groupes*. – PhD thesis, Faculté des Sciences de Paris, 1898.

[5] Singer (Michael F.). – Liouvillian solutions of n-th order homogeneous linear differential equations. *American Journal of Mathematics*, vol. 103, n° 4, 1981, pp. 661–682.

[6] Singer (Michael F.) and Ulmer (Felix). – Linear differential equations and products of linear forms. *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 117/118, 1997, pp. 549–563.