PROBLÈME : LA TECHNIQUE DE SŒUR CÉLINE ET L'ALGORITHME DE ZEILBERGER

[M] indique que la question se traite sur machine.

On considère une suite $\{F_{n,k}\}$ telle que $F_{n+1,k}/F_{n,k}$ et $F_{n,k+1}/F_{n,k}$ sont des fractions rationnelles dans $\mathbb{Q}(n,k)$. Le but de la technique de sœur Céline est de trouver deux entiers positifs I et J tels qu'existent des polynômes $a_{ij}(n) \in \mathbb{Q}[n]$ satisfaisant

$$\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J} a_{ij}(n)F_{n-i,k-j} = 0. \tag{1}$$

1. Lorsque I et J sont fixés, montrer comment trouver des équations linéaires satisfaites par les polynômes $a_{ij}(n)$.
2. Étant donnés I, J et des $a_{ij}(n)$ satisfaisant (1), montrer comment trouver une récurrence satisfaite par
$$S_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_{n,k}$$
dans le cas où $F_{n,k}$ est nul pour k hors d'un intervalle borné dépendant de n.
3. [M] Utiliser cette méthode (en augmentant I et J jusqu'à un succès) pour calculer des récurrences satisfaites par
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2, \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^3.$$
Dans chaque cas, en déduire si ces sommes sont hypergéométriques ou non.

La suite du problème vise à prouver que pour une classe de suites bien délimitées, une équation de la forme (1) existe toujours.

Définition. Une suite $\{F_{n,k}\}$ est dite *proprement hypergéométrique* (en anglais *proper hypergeometric*) quand le terme général peut s'écrire

$$F_{n,k} = P(n,k)\frac{\prod_{i=1}^{u}(a_in+b_ik+c_i)!}{\prod_{i=1}^{v}(d_in+e_ik+f_i)!}x^k, \tag{2}$$

où :

- P est un polynôme ;
- les a_i, b_i, d_i, e_i sont des entiers ;
- u et v sont des entiers positifs ou nuls (auquel cas le produit vaut 1).

4. Expliquer pourquoi seules les deux premières parmi les trois suites suivantes sont proprement hypergéométriques :
$$\binom{n}{k}2^k, \qquad \frac{1}{n+3k+1}, \qquad \frac{1}{n^2+k^2+1}.$$

5. Étant données deux fractions rationnelles $R(n,k) = F_{n+1,k}/F_{n,k}$ et $S(n,k) = F_{n,k+1}/F_{n,k}$, décrire un algorithme permettant d'écrire $F_{n,k}$ sous la forme (2) à une constante multiplicative près, ou décidant qu'une telle écriture n'existe pas.
6. Soit $F_{n,k} = (an + bk + c)!$ avec a et b des entiers. Soient i et j deux entiers positifs ou nuls. Montrer que $F_{n-j,k-i}/F_{n,k}$ est un polynôme en n et k lorsque $aj + bi < 0$ et l'inverse d'un polynôme en n et k sinon.
7. On suppose l'existence d'une identité de la forme (1). En divisant cette identité par $F_{n,k}$ et en réduisant au même dénominateur, montrer que le numérateur s'écrit sous la forme

$$\sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} a_{ij}(n) B_{ij}(n,k), \tag{3}$$

où les $B_{ij}(n,k)$ sont des polynômes en n et k.

8. Montrer qu'en outre, on peut prendre les polynômes $B_{ij}(n,k)$ dans (3) de telle sorte que leur degré soit borné par $\alpha I + \beta J + \gamma$ pour des α, β, γ indépendants de I et J.
9. En déduire l'existence d'une relation de la forme (1) satisfaite par la suite proprement hypergéométrique $F_{n,k}$ pour I et J assez grands.
10. En déduire la terminaison de la technique de sœur Céline et de l'algorithme de Zeilberger sur la classe des suites proprement hypergéométriques.