# EXERCICES SUR L'ASYMPTOTIQUE AUTOMATIQUE

1. On considère la fonction $y(x)$ solution du polynôme irréductible
$$P(x,y) = y^4 - 2(x-1)^2y^2 + x(x-1)^4.$$
   (a) Localiser les singularités de $y(x)$ (en évitant le calcul du résultant) ;
   (b) Tracer le polygone de Newton correspondant à la singularité en 1 ;
   (c) Poursuivre le calcul jusqu'au stade ou les quatre développements obtenus permettent de distinguer les quatre branches.
2. La fonction $W(x)$ de Maple est définie comme solution de l'équation
$$ye^y = x.$$
   (a) En considérant son comportement à l'infini, montrer que $W(x)$ n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux ;
   (b) En procédant comme pour les fonctions algébriques, déterminer la position de la singularité finie $\rho$ de $W(x)$ et la valeur $\tau$ de $W(x)$ à sa singularité ;
   (c) Calculer les deux premiers termes du développement de $ye^y$ au voisinage de $\tau$ ;
   (d) En déduire un équivalent de $W(\rho(1-x))$ lorsque $x$ tend vers $0+$ ;
   (e) En déduire un équivalent du $n$ème coefficient de Taylor du développement de $W(x)$ à l'origine, lorsque $n$ tend vers l'infini.
   (f) On peut montrer que le $n$ème coefficient de Taylor de $W(x)$ à l'origine vaut
$$(-1)^{n+1}\frac{n^{n-1}}{n!}.$$
   Montrer que le calcul précédent redonne la formule de Stirling au premier ordre.
3. Dans quelle base asymptotique peut on calculer le développement en multisérie de
$$x\exp(x+e^x), \qquad x \to \infty \ ?$$
   Que vaut ce développement ?