EXERCICES SUR LES SYSTÈMES DE RÉCURRENCES ET D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

1. Les polynômes de Jacobi $P_n^{(a,b)}(z)$ satisfont le systèmes d'équations suivant :

$$\mathcal{S} := \begin{cases} (1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}P_n^{(a,b)}(z) + (b-a-(a+b+2)z)\frac{d}{dz}P_n^{(a,b)}(z) + n(n+a+b+1)P_n^{(a,b)}(z) = 0, \\ 2(n+1)(n+a+b+1)P_{n+1}^{(a,b)}(z) - (z^2-1)(2n+a+b+2)\frac{d}{dz}P_n^{(a,b)}(z) \\ \quad -(n+a+b+1)((2n+a+b+2)z+a-b)P_n^{(a,b)}(z) = 0, \\ (n+a+b+1)P_n^{(a+1,b)}(z) = (z+1)\frac{d}{dz}P_n^{(a,b)}(z) + (n+a+b+1)P_n^{(a,b)}(z), \\ (n+a+b+1)P_n^{(a,b+1)}(z) = (z-1)\frac{d}{dz}P_n^{(a,b)}(z) + (n+a+b+1)P_n^{(a,b)}(z). \end{cases}$$

   (a) Trouver un anneau d'opérateurs linéaires différentiels aux différences et un ordre pour lequel $\mathcal{S}$ peut être base de Gröbner d'un idéal à gauche ;
   (b) expliquer quel calcul effectuer pour confirmer que $\mathcal{S}$ est une base de Gröbner pour cet ordre ;
   (c) donner une borne supérieure sur la dimension de l'espace vectoriel engendré par

$$\{\frac{d^i}{dz^i}P_{n+j}^{(a+k,b+\ell)}(z), (i,j,k,\ell) \in \mathbb{N}^4\}$$

   sur $\mathbb{Q}(a,b,n,z)$;
   (d) expliquer par quel calcul on peut prouver chacune des identités suivantes :

$$\begin{aligned}(2n+a+b+2)(1-z^2)\frac{d}{dz}P_{n+1}^{(a,b)}(z) \\ - (n+1)(a-b-(2n+a+b+2)z)P_{n+1}^{(a,b)}(z) \\ - 2(n+a+1)(n+b+1)P_n^{(a,b)}(z) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2(n+2)(n+a+b+2)(2n+a+b+2)P_{n+2}^{(a,b)}(z) \\ - (2n+a+b+3)[(2n+a+b+2)(2n+a+b+4)z + (a^2-b^2)]P_{n+1}^{(a,b)}(z) \\ + 2(n+a+1)(n+b+1)(2n+a+b+4)P_n^{(a,b)}(z) = 0\ ;\end{aligned}$$

   (e) expliquer par quel calcul on peut *trouver* une récurrence linéaire en n satisfaite par $P_n^{(a,b)}(z)$ à partir de $\mathcal{S}$.

2. Les coefficients binomiaux sont entièrement déterminés par le système :

$$\begin{cases} u_{n,k} = 0, & n < k, \\ u_{k,k} = 1, & \\ (n+1-k)u_{n+1,k} = (n+1)u_{n,k}, & n \geq k. \end{cases}$$

   Les conditions initiales ne sont pas prises en compte par l'approche reposant sur des anneaux d'opérateurs linéaires différentiels aux différences. Le but de cet exercice est

de montrer une méthode qui permet souvent de trouver de nouvelles équations pour déterminer un idéal ∂-fini malgré l'impossibilité de traiter les conditions initiales.

(a) Montrer que le système réduit au polynôme

$$p := S_n - \frac{n+1}{n+1-k} I$$

n'engendre par un idéal ∂-fini de $\mathbb{Q}(n,k)[S_n, S_k]$ où S_n désigne le décalage par rapport n et S_k le décalage par rapport à k.

(b) On suppose maintenant qu'il existe un idéal ∂-fini $\mathcal{I}$ de $\mathbb{Q}(n,k)[S_n, S_k]$ contenant le polynôme p et annulant la suite $\{u_{n,k}\}$ des coefficients binomiaux. En outre, on fait l'hypothèse que le quotient $\mathbb{Q}(n,k)[S_n, S_k]/\mathcal{I}$ est de dimension 1. Montrer que toute base de Gröbner de $\mathcal{I}$ doit alors être la forme $\{p, q\}$, où q est un polynôme de la forme $S_k + A(n,k)I$ avec $A \in \mathbb{Q}(n,k)$.

(c) Montrer qu'exiger que $\{p, q\}$ soit une base de Gröbner entraîne une récurrence linéaire sur $A(n,k)$.

(d) Expliquer comment calculer alors $A(n,k)$.

3. On cherche une solution particulière de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) - q^2 y(x) = (1-x^2) I_0(qx),$$

où I_0 est une fonction de Bessel modifiée, solution de l'équation

$$xy''(x) + y'(x) - xy(x) = 0.$$

Montrer comment adapter la technique de sommation indéfinie vue en cours pour déterminer s'il existe une solution de (E) combinaison linéaire de $I_0(qx)$ et $I_0'(qx)$.