EXERCICES SUR LES RÉCURRENCES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

[M] indique que le calcul se fait sur machine. Pour ces calculs, on aura intérêt à utiliser le package `gfun` de la *share library* (voir `?share`), ou une version plus récente qui se trouve à `ftp.inria.fr:/INRIA/Projects/algo/programs`.

1. Soit $\{u_n\}$ une suite vérifiant la récurrence linéaire inhomogène à coefficients polynomiaux d'ordre k
$$a_k(n)u_{n+k} + \cdots + a_0(n)u_n = b(n)$$
Montrer que $\{u_n\}$ satisfait une récurrence linéaire homogène d'ordre $(k+1)$ à coefficients polynomiaux.
2. Calculer une équation différentielle satisfaite par la série génératrice de la suite satisfaisant
$$(n-10)u_{n+1} - u_n = 0.$$
Expliciter les contraintes obéies par les conditions initiales.
3. La fonction hypergéométrique ${}_2F_1$ satisfait l'identité suivante :
$${}_2F_1\left(\left.\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \frac{\alpha+\beta+1}{2}\end{matrix}\right| z\right) = (1-2z)^{-\alpha}\,{}_2F_1\left(\left.\begin{matrix}\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2}\\ \frac{\alpha+\beta+1}{2}\end{matrix}\right| \frac{4z(z-1)}{(2z-1)^2}\right).$$
   (a) Expliquer comment on peut prouver cette identité à l'aide du calcul formel.
   (b) Si l'on ne connaît que le membre droit de cette identité, comment peut-on calculer le membre gauche ?
4. [M] Que vaut le coefficient de x^{3000} dans le développement du polynôme
$$(x+1)^{2000}(x^2+x+1)^{1000}(x^4+x^3+x^2+x+1)^{500}\ ?$$
Pour le calculer, commencer par construire une récurrence satisfaite par ces coefficients, à l'aide des propriétés de clôture des solutions d'équations différentielles linéaires.
5. La fonction
$$f = \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}$$
admet un développement de Taylor à l'origine. Expliquer comment prouver que la suite des coefficients est hypergéométrique.
6. [M] Sachant que la fonction de Bessel $J_0(z)$ satisfait l'équation différentielle
$$zy''(z) + y'(z) + zy(z) = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0,$$
calculer le développement en série de $f(z) = J_0(1-\sqrt{1-4z})$ en calculant d'abord une équation différentielle linéaire satisfaite par $f(z)$. Comparer avec le temps de calcul mis par la commande `series`.