EXERCICES SUR L'INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES

[M] indique que le calcul se fait sur machine.

1. [M] Calculer avec Maple
$$\int \frac{dx}{(x^3-x-1)^3}.$$
Retrouver par un autre calcul l'argument du logarithme apparaissant dans la solution.
2. [M] Calculer les primitives
$$\int \frac{dx}{x^4-3x^2-1}, \qquad \int \frac{dx}{(x^3-7x^2-4x+10)^2}.$$
En donner une expression continue sur chaque intervalle du domaine de définition.
3. Si $Q = Q_1^1 Q_2^2 \cdots Q_m^m$ est la décomposition sans carrés du dénominateur Q d'une fraction rationnelle P/Q, la méthode de réduction d'Hermite vise à écrire P/Q sous la forme
$$\frac{P}{Q} = \left(-\frac{A}{G}\right)' + \frac{C}{Q_1 \cdots Q_m} \tag{1}$$
avec $\deg A < \deg G$ et $\deg C < \deg(Q_1 \cdots Q_m)$.

   Détailler un algorithme prenant en entrée P et Q et renvoyant la décomposition (1) en utilisant une méthode de coefficients indéterminés pour trouver A et C.
4. En suivant les étapes de l'algorithme vu en cours, calculer
$$\int \frac{dx}{1+x^n}, \qquad n \in \mathbb{N}^\star.$$
5. [M] Montrer que
$$\int_{-100}^{100} \left(\frac{x^2-x}{x^3-3x+1}\right)^2 dx + \int_{\frac{1}{101}}^{\frac{1}{11}} \left(\frac{x^2-x}{x^3-3x+1}\right)^2 dx + \int_{\frac{101}{100}}^{\frac{11}{10}} \left(\frac{x^2-x}{x^3-3x+1}\right)^2 dx$$
est un nombre rationnel.