EXERCICES SUR LES POLYNÔMES MULTIVARIÉS

[M] indique que le calcul se fait sur machine.

1. Expliquer comment calculer une représentation implicite de la surface paramétrée
$$x = t(u^2 - t^2), \qquad y = u, \qquad z = u^2 - t^2.$$
2. Comment déterminer s'il existe deux polynômes P et Q dans $\mathbb{Q}[x, y, z]$ tels que les polynômes
$$f = xy^3 - z^2 + y^5 - z^3, \qquad g = y - x^3, \qquad h = x^2y - z$$
soient liés par la relation
$$f = Pg + Qh \ ?$$
S'ils existent, comment calculer ces polynômes ?
3. Expliquer comment calculer un polynôme dans $\mathbb{Q}[x, y, z]$ qui s'annule sur tous les points de la surface
$$x = (2 + \cos(t))\cos(u), \qquad y = (2 + \cos(t))\sin(u), \qquad z = \sin(t).$$
4. [M] Trouver les solutions *rationnelles* (c'est-à-dire dans $\mathbb{Q}^3$) de
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \qquad x^2 + 2y^2 = 5, \qquad xz = 1.$$
5. Expliquer comment écrire les polynômes $\sigma_4 = x_1x_2x_3x_4$ et $p_5 = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5$ comme des polynômes en les variables
$$p = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \qquad p_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$
$$p_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3, \qquad p_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4.$$
6. Comment calculer une relation de dépendance algébrique entre les polynômes
$$x^2 + y^2, \qquad x^2y^2, \qquad x^3y - xy^3 \ ?$$
7. [M] Calculer l'équation de la projection sur Oxz de l'intersection d'une sphère et d'un cylindre donnés par les équations
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad x^2 + y^2 - x = 0.$$
8. [M] D'un point P on mène les tangentes PA, PB à un cercle de rayon R. Trouver la courbe parcourue par le centre de gravité du triangle PAB lorsque le point P décrit une droite située à distance d du centre du cercle.
9. [M] On considère la glissade d'une échelle contre un mur perpendiculaire au sol. Déterminer l'équation de l'enveloppe des positions de l'échelle.