EXERCICES SUR LES POLYNÔMES

[M] indique que le calcul se fait sur machine.

1. [M] Calculer le résultant de
$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 7x + 6 \qquad \text{et} \qquad x^4 + x^2 + 1.$$
Sans calculer de pgcd, en déduire si ces polynômes ont un facteur commun sur $\mathbb{Q}[x]$.
2. Expliquer par quel calcul on détermine si
$$6x^4 - 23x^3 + 32x^2 - 19x + 4$$
a une racine multiple dans $\mathbb{C}$.
3. Si P et Q sont deux polynômes de degré m et n en x, que vaut $\mathrm{Res}_x(P,Q)/\mathrm{Res}_x(Q,P)$?
4. [M] Calculer le résultant de
$$x^2y - 3xy^2 - 3xy \qquad \text{et} \qquad x^3y - 4y^2 + y + x^3 - 4y + 1,$$
d'abord en x, puis en y. Interpréter le résultat.
5. Certaines des racines du résultant en x de
$$xy - 1 \qquad \text{et} \qquad x^2y + y^2 - 4$$
ne correspondent pas à des ordonnées d'intersection des deux courbes. Expliquer pourquoi. En est-il de même pour le résultant en x de
$$xy - 1 \qquad \text{et} \qquad x^2y + y^2 - 4 \ ?$$
6. Soit $P(X)$ un polynôme. Comment peut-on calculer un polynôme de même degré dont les racines complexes sont les carrés des racines de P ? Même question pour les puissances $k$èmes.
7. Si les équations différentielles
$$x(x-1)(3y^2-2)y'^2 - y(6x^2y^2 - xy^2 + y^2 + 2x - 2 - 4x^2)y' \\ -2xy^2(y^2-2) = 0,$$
$$(2x+1)(4xy^3 - 4xy - 1)y'^2 - y(4x^3y^3 - 4x^3y - x^2 - 2xy^3 + 4xy - y^3 + 2y)y' \\ -x^2y^3(y^2-2) = 0$$
ont des solutions communes, montrer sans calcul qu'elles sont algébriques et expliquer comment calculer un polynôme les annulant.