Asymptotique automatique. II.

Bruno Salvy

INRIA

I. Échelles asymptotiques

Définitions

Définition 1. Échelle asymptotique en x_0 : $\mathcal{S} = \{\phi_i\}_{i\in I}$,

$$\forall(i,j), \quad i < j \Longrightarrow \frac{|\phi_j(x)|}{|\phi_i(x)|} \to 0, \quad x \to x_0.$$

Exemple : $\{x^q\}_{q\in\mathbb{Q}}$, séries de Puiseux en 0.

Définition 2. Développement asymptotique dans $\mathcal{S}$

$$f(x) = a_1(x)\phi_{i_1}(x) + \cdots + a_k(x)\phi_{i_k}(x) + r(x),$$

$i_1 < \cdots < i_k$, $a_i(x)$ bornés non nuls ne tendant pas vers 0,

$$|r(x)|/|\phi_{i_k}(x)| \to 0.$$

Exemple : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dfrac{x^4}{1-x}.$

La structure `series` en Maple

$$\sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n + O(z^N)$$

$$\log|f_n| = o(\log z)$$

Permet de manipuler un peu plus que des séries entières.

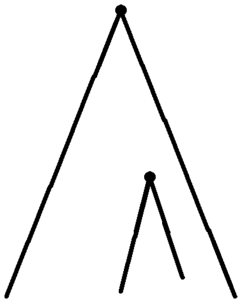
Inexistence d'une échelle universelle

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \vdots & & & & & & \\
 & & & & & \dots & e^{e^x} & \dots & & & & & \\
 & & \dots & e^{-x} & & \dots & e^x & \dots & e^{2x} & \dots & & & \\
\dots & x^{-2} & \dots & x^{-1} & & \dots & x & \dots & x^2 & \dots & x^3 & \dots & \\
 & & \dots & \ln^{-1} x & & \dots & \ln x & \dots & \ln^2 x & \dots & & & \\
 & & & & & \dots & \ln \ln x & \dots & & & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

$$\exp\left(\log^{3/2} x \log \log x\right)$$

II. Asymptotique des fonctions exp-log

Fonctions exp-log



$+, \times, \exp, \log|\cdot|$

Définition. Les fonctions exp-log sont les fonctions obtenues à partir de $\mathbb{Q}(x)$ par les opérations d'addition, multiplication, exponentielle et $\log|\cdot|$.

Théorème de Hardy

Théorème [Hardy]. Toute fonction exp-log $f(x)$ a une limite (finie ou infinie) lorsque $x \to +\infty$.

Les autres points par changement de variable.

Objectif : déterminer cette limite, déterminer le comportement asymptotique.

Problème 1 : trouver l'échelle asymptotique

$$f = \log\log(xe^{xe^{x}} + 1) - \exp\exp(\log\log x + 1/x).$$

Problème 2 : annulation perpétuelle

$$e^{1/x+\exp(-x)} - e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \cdots - (1 + \frac{1}{x} + \cdots) = O(\frac{1}{x^K}$$

Définition. Un n-uplet $(g_1, \ldots, g_n)$ de fonctions exp-log positives tendant vers l'infini *engendre* une échelle asymptotique lorsque $\log g_i = o(\log g_{i+1})$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Survol de l'algorithme

1. Construction itérative d'un n-uplet de fonctions exp-log $(g_1, \ldots, g_n)$ telles que $g_1, \ldots, g_n$ engendre la "bonne" échelle asymptotique ;

2. expression de la fonction en termes de $g_1, \ldots, g_n$;

3. développement par rapport à g_n :

$$f = \sum_{\alpha \in S} c_\alpha(g_1, \ldots, g_{n-1}) g_n^\alpha;$$

4. récursion si nécessaire.

Multiséries

Définition 1. Soit g une fonction exp-log positive tendant vers l'infini. Une *multisérie* par rapport à g est une somme formelle :

$$f = \sum_{\alpha \in S} f_\alpha g^\alpha,$$

où les f_α sont des fonctions exp-log et $S \subset \mathbb{R}$,

$$S = \alpha_1 \mathbb{N} + \alpha_2 \mathbb{N} + \cdots + \alpha_k \mathbb{N} + \beta, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}^-, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemple :

$$\frac{1}{1 - x^{-1} - x^{-e}} = 1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-e} + x^{-3} + 2x^{-1-e} + \ldots, \qquad x \to \infty.$$

Définition 2. Si $(g_1, \ldots, g_n)$ engendre une échelle asymptotique, un *développement en multisérie* par rapport à $(g_1, \ldots, g_n)$ est une multisérie par rapport à g_n dont les coefficients ont un développement en multisérie par rapport à $(g_1, \ldots, g_{n-1})$, les multiséries par rapport à g_1 ayant des coefficients constants. On note $\mathbb{R}[[g_1; \ldots; g_n]]$ l'ensemble des fonctions exp-log ayant un tel développement.

Exemple :

$$e^{1/x + \exp(-x)} = \sum_{n \geq 0} e^{1/x} \frac{\exp(x)^{-n}}{n!}.$$

Bases asymptotiques

Définition. $(g_1, \ldots, g_n)$ engendrant une échelle asymptotique est une *base asymptotique* lorsque

1. $g_1 = \log_k x$ $(k \in \mathbb{N})$ $(\log_0 x = x,\ \log_{k+1} x = \log \log_k x)$;

2. $\log g_i \in \mathbb{R}[[g_1 ; \ldots ; g_{i-1}]]$, $i = 2, \ldots, n$.

Opérations avec les multiséries

Exemple : F et G dans $\mathbb{R}[[g_1; \ldots ; g_n]]$. On veut calculer les premiers termes du développement en multiséries de $F + G$.

Principe : test d'égalité entre fonctions et troncation du développement

Si $F + G = 0$, terminé. Sinon, on calcule le développement par rapport à g_n, et les coefficients récursivement.

Produit, $\exp(F)$, $1/(1 + F)$ ou $\log(1 + F)$ lorsque $F \to 0$ se traitent de la même façon.

Construction de la base asymptotique pour une fonction F

On part de $\{x\}$. On veut construire une base $(g_1, \ldots, g_n)$ telle que $F \in \mathbb{R}[[g_1; \ldots; g_n]]$.

Hypothèse de récurrence : $(g_1, \ldots, g_p)$ a été construit, et pour tout $f \in \mathbb{R}[[g_1; \ldots; g_p]]$, on sait calculer les premiers termes du développement en multisérie

$$f = \sum_{\alpha \in S} \underbrace{c_\alpha(g_1, \ldots, g_{p-1})}_{\neq 0} g_p^\alpha.$$

Seuls cas où une nouvelle fonction peut entrer dans la base :

$$\log(f) \quad \text{ou} \quad \exp(f), \qquad f \to \infty \quad \text{et} \quad f \in \mathbb{R}[[g_1; \ldots; g_p]].$$

– Logarithme $\qquad f \sim C g_1^{\alpha_1} \cdots g_p^{\alpha_p} (=: f_0)$.

Si $\alpha_1 = 0$,

$$\log|f| = \log|C| + \sum \alpha_i \underbrace{\log|g_i|}_{\in \mathbb{R}[[g_1,\dots,g_p]]} + \log(1 - \underbrace{\frac{f - f_0}{f_0}}_{\to 0});$$

sinon, ajouter $g_0 = \log g_1$ à la base d'abord.

– Exponentielle. $f \to \infty$. Tester si

$$f \sim \alpha \log g_i, \quad i > 1, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Si oui, $\exp(f) = g_i^{\alpha} \exp(f - \alpha \log g_i)$ et on recommence récursivement.

Sinon, on insère $\exp(f)$ dans la base.

Exemple détaillé (à la main)

$$f = \log\log(xe^{xe^x} + 1) - \exp\exp(\log\log x + \frac{1}{x}).$$

Base : $\{\log\log x, \log x, x, e^x, \exp(xe^x)\}$.

Résultat

$$f \sim -\frac{\log^2 x}{2x}.$$

III. Coefficients de fonctions génératrices

Exemples

- Arbres binaires

$$C(z) = \sum_{n\geq 0} C_n z^n = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$$

$$C_n \sim 4^n \frac{n^{-3/2}}{\sqrt{\pi}}, \quad n \to \infty.$$

- Dérangements

$$D(z) = \sum_{n\geq 0} D_n \frac{z^n}{n!} = \frac{e^{-z}}{1-z}$$

$$\frac{D_n}{n!} \sim e^{-1}, \quad n \to \infty$$

- Surjections de $\{1,\ldots,n\}$

$$S(z) = \sum_{n\geq 0} S_n \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2-e^z}$$

$$\frac{S_n}{n!} \sim \frac{1}{2(\log 2)^{n+1}}, \quad \to \infty$$

Analyse de singularités

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n.$$

Théorème Si $f(z)$ est analytique à l'origine, si f n'a qu'une singularité ρ sur son cercle de convergence et se prolonge analytiquement dans un domaine

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq |\rho| + \epsilon, |\arg(z - \rho) - \arg \rho| \geq \phi > 0\}.$$

Si pour un $\alpha \notin \mathbb{N}$,

$$f \sim C(1 - z/\rho)^\alpha \log^\beta \frac{1}{1 - z/\rho}, \quad z \to \rho \text{ dans } \Delta,$$

$$\text{alors } f_n \sim C\rho^{-n} \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \log^\beta n, \quad n \to \infty.$$

Se généralise

Méthode de calcul

1. Localiser la singularité de plus petit module (*singularité dominante*) ;
2. calculer le comportement au voisinage de la singularité dominante ;
3. traduire en le comportement des coefficients.

Conséquences

Dans le cas où il n'y a qu'une singularité dominante

1. les coefficients de fonctions algébriques se comportent asymptotiquement en
$$C\rho^{-n}\frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$$
avec C, ρ algébriques, α rationnel. On peut tout calculer à partir de l'équation $P(x, y(x)) = 0$;

2. les solutions de récurrences linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}(n)$ dont la fonction génératrice a une singularité dominante qui est un point singulier régulier ont un comportement asymptotique de la forme
$$C\rho^{-n}\frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\log^{\beta} n, \quad n \to \infty,$$
avec ρ et α algébriques, β entier. On peut tout calculer (sauf C) sans résoudre.

Exemple : longueur de cheminement moyenne dans les quadtrees

$$\left(z(1-z)\frac{d}{dz}\right)^d \left(f(z) - \frac{z}{(1-z)^2}\right) - 2^d f(z) = 0$$

1. Singularité : 1 ;
2. Solutions de l'équation homogène : équation indicielle $\alpha^d = 2^d$

$$\to \begin{cases} d \text{ impair} & \{(1-z)^\alpha + O((1-z)^{\alpha+1}), \alpha^d = 2^d\}, \\ d \text{ pair} & \{\text{idem}, \alpha \neq 2\} \cup \{(1-z)^2 \log(1-z) + O((1-z)^2)\} \end{cases}.$$

3. Équation inhomogène : $\dfrac{2}{d}\dfrac{1}{(1-z)^2}\log\dfrac{1}{1-z} + O((1-z)^{-2})$;
4. Conclusion : $p_n \sim \dfrac{2}{d} n \log n$.

Résumé du cours

Classes d'expressions avec lesquelles on sait travailler ($\mathbb{A}$ anneau)

entiers, rationnels ;

matrices ($\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{A})$) ;

polynômes $\mathbb{A} \to \mathbb{A}[x] \to \mathbb{A}[x_1, \ldots, x_n]$;

fractions rationnelles $\mathbb{A}(x_1, \ldots, x_n)$;

nombres algébriques $\mathbb{A}[x]/(P(x))$;

solutions de systèmes polynomiaux ;

suites et fonctions hypergéométriques ;

solutions d'équations différentielles linéaires ;

solutions de récurrences linéaires ;

solutions de systèmes linéaires ;

fonctions élémentaires, fonctions exp-log.

Algorithmes principaux

reconnaissance de zéro ;

clôture (addition, produit) ;

“résolution” : preuves d’existence de solutions dans certaines classes (rationnelles, hypergéométriques, …) ;

développements en série ou asymptotiques.

Bibliographie sur l'asymptotique

DIEUDONNÉ (Jean). – *Calcul Infinitésimal.* – Hermann, Paris, 1968.

DE BRUIJN (Nicolaas G.). – *Asymptotic Methods in Analysis.* – Dover, 1981. Une réimpression de la troisième édition par North Holland, en 1970 (première édition, 1958).