Asymptotique automatique. I.

Bruno Salvy

INRIA

I. Développement des fonctions algébriques

1. Rappel : points réguliers
2. Points singuliers
3. Le polygone de Newton

II. Solutions d'équations différentielles linéaires

1. Position des singularités
2. Applications
2. Types de comportements singuliers
4. Applications

III. Points singuliers réguliers

1. Méthode de Frobenius
2. Exemple : l'équation de Bessel
3. Suite de la méthode de Frobenius

Motivations

Calcul exact (fonctions génératrices)

- Probabilités
- Combinatoire
- Polynômes orthogonaux
- Functions speciales

Approximation $\Longrightarrow$ generation de code numerique.

Problèmes principaux : échelles asymptotiques, annulation perpétuelle

Rappel : calcul avec des séries formelles

Complexité en nombre d'opérations sur les coefficients

- Somme $F + G$ en $O(N)$;
- Produit $F \times G$ en $M(N) = O(N^{\log_2 3})$ (Karatsuba) ;
- Inverse $1/F$, logarithme $\log(1 + F)$, exponentielle $\exp(F)$ en $O(M(N))$;
- Composition $F(G)$ et inverse F^{-1} en $O(NM(N))$.

I. Développement des fonctions algébriques

Rappel : points réguliers

Équation polynomiale $\rightarrow$ équation différentielle $\rightarrow$ récurrence
Complexité en $O(N)$ opérations sur les coefficients

Points singuliers

$$P \in \mathbb{K}[x, y]$$

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ P'_y(x, y) = 0. \end{cases} \qquad \text{(théorème des fonctions implicites)}$$

Étude du comportement au voisinage de ρ singularité

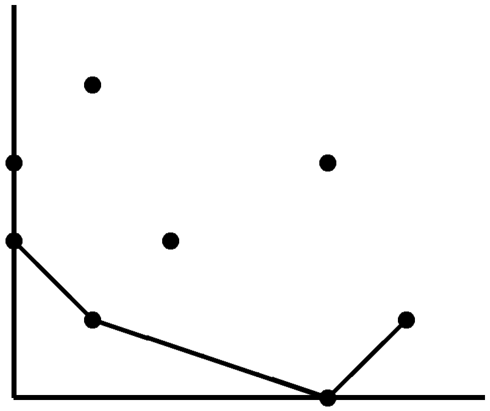
$$P(x, y) = \sum a_{ij}(x - \rho)^i y^j.$$

changement de variable $\to \rho = 0$.

Le polygone de Newton

$$P(x,y) = \sum a_{ij} x^i y^j .$$

Enveloppe convexe inférieure de $\{(i,j), a_{ij} \neq 0\}$



Largeur $\leftrightarrow$ degré en y

$$y \sim cx^{\alpha} \Rightarrow x^i y^j \sim c^j x^{i+\alpha j}$$

$$\Rightarrow -\alpha \text{ pente du polygone}$$

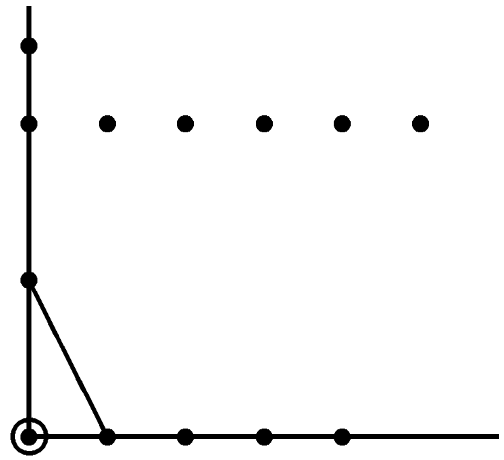
$$\Rightarrow \alpha \text{ rationnel}, c \text{ algébrique}$$

$$\deg P_c(c) = d = \text{largeur du segment}$$

Suite du calcul

Changement de variables :

$$\alpha = \frac{n}{d}, \quad x = X^d, \quad y = X^n(c+Y), \quad P(x,y) =: p(X,Y)$$



- Seules les pentes négatives comptent $(Y \to 0)$;
- les racines c de P_c donnent un nombre de développements égal à leur multiplicité ;
- lorque cette multiplicité est 1, cas régulier $\to$ calcul rapide.

Développements de Puiseux

$$y = \sum_{i \geq i_0} a_i x^{i/q} \qquad q \leq \deg_y P.$$

II. Solutions d'équations différentielles linéaires

Position des singularités

$$a_k(z)y^{(k)}(z)+\cdots+a_0(z)y(z)=0,\qquad a_i(z)\in\mathbb{K}[z]\subset\mathbb{C}[z].$$

$$\to Y'=AY,\quad Y=\begin{pmatrix} y\\ \vdots\\ y^{(k-1)}\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & -a_0/a_k\\ & & \ddots & & \vdots\\ & 0 & & 1 & \\ & & & & -a_{k-1}/a_k\end{pmatrix}.$$

“Rappel” : Si $A(x)$ est analytique dans une région simplement connexe $R\subset\mathbb{C}$, alors $Y'=AY$ possède une unique solution telle que $Y(a)=\alpha$ où $a\in R$ et α est un vecteur constant arbitraire. Cette solution est analytique dans R.

Corollaire. Les singularités finies sont aux racines de $a_k(z)$.

L’infini est singulier ssi $y(1/z)$ est singulier en 0.

Applications

- $1/\sin z$, $\tan z$, $\Gamma(z)$ ne sont pas solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux ;
- les solutions d'équations différentielles à coefficients polynomiaux ne sont pas closes par composition ;
- la suite des nombres de Bernoulli n'est pas solution d'une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux.

Types de comportements singuliers

Changement de variable $\rightarrow$ singularité en 0

$$a_k(z)y^{(k)}(z) + \cdots + a_0(z)y(z) = 0, \qquad a_i(z) \in \mathbb{K}[z] \subset \mathbb{C}[z].$$

– point singulier *régulier*:

$$z^i | a_i(z), \quad i = 0, \ldots, k \quad \text{et} \quad z^{k+1} \nmid a_k(z).$$

k solutions linéairement indépendantes de la forme

$$z^\alpha \sum_{i \geq 0} P_i(\log z) z^i,$$

avec α algébrique, $P_i \in \mathbb{K}(\alpha)[z]$ de degré au plus k et la série converge.

– point singulier *irrégulier*: les autres cas. k solutions linéairement indépendantes de la forme

$$e^{P(1/z^{1/k})} z^\alpha \sum_{i \geq 0} P_i(\log z) z^{i/k}$$

avec P, α algébrique, P_i polynômes.

Applications

$$\log \log z, e^{e^z}$$

ne satisfont pas d'équation différentielle linéaire.

Les coefficients B_n de

$$e^{e^z - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{z^n}{n!}$$

(nombres de Bell) ne satisfont pas de récurrence linéaire à coefficients polynomiaux.

III. Points singuliers réguliers

Méthode de Frobenius (1873)

$$L \cdot y := p_k(z) z^k y^{(k)}(z) + \cdots + p_0(z) z^0 y(z) = 0,$$

$p_k(0) \neq 0$. On cherche une solution de la forme

$$W(z, \alpha) = z^\alpha \sum_{i \geq 0} c_i z^i.$$

$$L \cdot z^\alpha = z^\alpha \sum_{j \geq 0} P_j(\alpha) z^j$$

$$\Longrightarrow L \cdot W(z, \alpha) = z^\alpha \sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{i} c_j P_{i-j}(\alpha + j) \right) z^i.$$

D'où un système triangulaire infini

$$P_0(\alpha + i) c_i = - \sum_{j=0}^{i-1} c_j P_{i-j}(\alpha + j), \quad i \geq 1.$$

Pour β tel que $P_0(\beta + i) \neq 0$, $i \geq 1$, ce système donne une série $W(z, \beta)$ telle que

$$L \cdot W(z, \beta) = c_0 P_0(\beta) z^\beta.$$

Définition. $P_0(\alpha) = 0$ est *l'équation indicielle*.
C'est un polynôme de degré k.

Si P_0 est sans carrés et $P_0(\alpha) \wedge P_0(\alpha + i) = 1$, on obtient ainsi k solutions linéairement indépendantes.

Détection : décomposition sans carrés, solutions entières d'un résultant.

Exemple : l'équation de Bessel

$$z^2 y''(z) + zy'(z) + (z^2 - \nu^2) y(z) = 0.$$

1. 0 est point singulier régulier ;
2. équation indicielle :
$$P_0(\alpha) = \alpha^2 - \nu^2 = 0.$$
3. des solutions diffèrent de i lorsque i est solution de
$$\mathrm{Resultant}_\alpha(P_0(\alpha), P_0(\alpha + i)) = i^2 (i - 2\nu)(i + 2\nu).$$
4. lorsque 2ν n'est pas entier, on obtient ainsi deux solutions indépendantes
$$z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{(\alpha+1)_k k!}, \qquad \alpha = \pm\nu,$$
5. ces solutions sont aussi valides (et indépendantes) lorsque ν est un demi-entier.

Suite de la méthode de Frobenius

$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{i_1} > \alpha_{i_1+1} = \cdots = \alpha_{i_2} > \cdots = \alpha_{i_p}$ racines de P_0, $\alpha_{i_j} - \alpha_{i_k} \in \mathbb{Z}$.

Soit $t = \alpha_1 - \alpha_{i_p}$, avec $c_0 = u_0 P_0(\beta+1) \cdots P_0(\beta+t)$, on a une série solution $W(z,\beta)$ telle que

$$L\,W(z,\beta) = u_0 P_0(\beta) \cdots P_0(\beta+m) z^\beta.$$

α_{i_k} est racine du membre droit avec multiplicité i_k, donc pour $j = 0, \ldots, i_k - 1$

$$\frac{\partial^j}{\partial \beta^j} L\,W(z,\beta)|_{\beta=\alpha_{i_k}} = L\,\frac{\partial^j}{\partial \beta^j} W(z,\beta)|_{\beta=\alpha_{i_k}} = 0.$$

En prenant $j = i_{k-1}+1, \ldots, i_k$ on obtient des solutions indépendantes de la forme

$$\log^j z W(z, \alpha_{i_k}) + \ldots$$

Solutions de l'équation de Bessel pour ν entier

Par symétrie on peut prendre $\nu \geq 0$.

Deux racines diffèrent d'un entier (2ν). Après un peu de calcul (voir session), on trouve les solutions indépendantes

$$w_1 = z^\nu \sum_{n\geq 0} \frac{(-z^2/4)^n}{(\nu+1)_n n!},$$

$$w_2 = (z/2)^{-\nu} \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{\Gamma(\nu-n)}{\Gamma(n+1)} (z^2/4)^n$$
$$- (z/2)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^n}{\Gamma(\nu+n+1)n!} [2\log z - \psi(n) - \psi(n+\nu)].$$