Équations différentielles et récurrences linéaires

Bruno Salvy

INRIA

I. Lien récurrences–équations différentielles

1. Extraction de coefficients
2. Réciproque
3. Applications
4. Exemples

II. Propriétés de clôture

1. Somme et produit
2. Autres propriétés de clôture

III. Fonctions algébriques

1. Théorème
2. Application combinatoire
3. Substitution algébrique
4. Exemple en asymptotique

Quelques identités

$$F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^n$$

$$\sin^2 + \cos^2 = 1,$$

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(zt)}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt,$$

$$(z^2 J_n''(z) + z J_n'(z) + (z^2 - n^2) J_n(z) = 0)$$

$$\cos(z) = J_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(z).$$

I. Lien récurrences–équations différentielles

Extraction de coefficients

$$a_k(z)y^{(k)}(z) + \cdots + a_0(z)y(z) = 0, \qquad a_i(z) \in \mathbb{K}[z].$$

Si la série formelle

$$y(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$$

est solution, alors $\{c_n\}$ est solution d'une récurrence linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}[n]$.

Preuve.

$$z^j y^{(i)}(z) = \sum_{n\geq 0}(n+1)\cdots(n+i)c_{n+i}z^{n+j}.$$

Ordre : $k + \max_i\{\deg(a_i) - i\}$.

Réciproque

$$b_k(n)c_{n+k} + \cdots + b_0(n)c_n = 0, \qquad b_i(n) \in \mathbb{K}[n].$$

Si la suite $\{c_n\}$ est solution, alors sa série génératrice

$$\sum_{n\geq 0} c_n z^n$$

est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}[z]$.

Preuve.

$$\sum_{n\geq j} n^i c_{n-j} z^n = \left(z\frac{d}{dz}\right)^i z^j \sum_{n\geq 0} c_n z^n.$$

$\rightarrow$ équation inhomogène d'ordre $\max_i \deg(b_i)$

$\rightarrow$ équation homogène d'ordre $1 + \max_i \deg(b_i)$.

Applications

- Calcul efficace du développement en série de solutions d'équations différentielles linéaires ;
- recherche de solutions hypergéométriques des équations différentielles.

Exemples

$$y'(z) - zy(z) = 0 \Longrightarrow (n+2)c_{n+2} = c_n.$$

$$zy''(z) - y(z) = 0 \Longrightarrow n(n+1)c_{n+1} = c_n.$$

$$(z^3 - 2z^2 + z)y^{(3)}(z) + (7z^2 - 15z + 8)y''(z) + (10z - 13)y'(z) - 2y(z) = 0,$$

$$\Rightarrow (n^2 + 10n + 16)c_{n+2} - (2n^2 + 13n + 13)c_{n+1} + (n^2 - 3n - 2)c_n = 0,$$

$$\text{(Petkovšek)} \to c_{n+1}/c_n = (n+2)/(n+7) \text{ solution,}$$

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,2\\7\end{matrix}\middle|\, z\right) \text{ solution.}$$

II. Propriétés de clôture

Motivation

$$\sin z = \sum_{k=0}^{N} c_k z^k + O(z^{N+1}),$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{N} d_k z^k + O(z^{N+1}),$$

$$\Rightarrow \sin z \cos z = \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{k} c_i d_{k-i} z^k + O(z^{N+1}).$$

$O(N^2)$ opérations au lieu de $O(N)$.

Séries

Théorème. Si $f(z)$ et $g(z)$ sont des séries formelles solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients dans $\mathbb{K}[z]$, alors il en va de même pour $f(z)+g(z)$ et $f(z)g(z)$.

Algorithme. Algèbre linéaire en dimension finie.

Exemple

$$\sin^2 + \cos^2 = 1.$$

1. $\sin'' = -\sin$, $\cos'' = -\cos$.

$$\begin{aligned} f &= \sin^2 + \cos^2, \\ f' &= 2\sin\sin' + 2\cos\cos', \\ f'' &= 2\sin'^2 + 2\cos'^2 - 2\sin^2 - 2\cos^2, \\ f''' &= -8\sin\sin' - 8\cos\cos' = -4f'. \end{aligned}$$

2. $\cos = \sin'$, $\sin'' = -\sin$.

$$\begin{aligned} f &= \sin^2 + \sin'^2, \\ f' &= 2\sin\sin' - 2\sin\sin' = 0. \end{aligned}$$

Il suffit de vérifier un nombre fini de conditions initiales.

Suites

Théorème. Si $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont deux suites solutions de récurrences linéaires à coefficients dans $\mathbb{K}[n]$, alors $\{u_n + v_n\}$ et $\{u_n v_n\}$ le sont aussi.

Même preuve, même algorithme.

Exemple : identité de Cassini

$$F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^n.$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$\begin{aligned}
u_n &= F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = F_n^2 + F_n F_{n+1} - F_{n+1}^2, \\
u_{n+1} &= F_{n+1}^2 + F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) - (F_n + F_{n+1})^2, \\
&= F_{n+1}^2 - F_{n+1} F_n - F_n^2, \\
&= -u_n.
\end{aligned}$$

Il suffit de vérifier un nombre fini de conditions initiales.

Autres propriétés de clôture

Coefficients	Séries	
$u_n + v_n$	$f(z) + g(z)$	
$u_n \cdot v_n$	$f(z) \odot g(z)$	(produit d'Hadamard)
$\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$	$f(z)g(z)$	
$\sum_{k=0}^{n} u_k$	$f(z)/(1-z)$	
$u_n/n!$	$\mathcal{B}(f(z))$	(transformée de Borel)
$n!u_n$	$\mathcal{L}(f(z))$	(transf. Laplace modifiée)

Exemple

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} =?$$

1. Algorithme de Zeilberger ;

2.

$$\begin{aligned} U(z) &= \sum_{k\geq 0} \binom{2k}{k} z^k, \\ \frac{u_{k+1}}{u_k} &= 2\frac{2k+1}{k+1}, \\ (1-4z)U'(z) &= 2U(z), \\ U(z) &= \frac{1}{\sqrt{1-4z}}, \\ U^2(z) &= \frac{1}{1-4z}, \\ \sum &= 4^n. \end{aligned}$$

Également possible sans résoudre.

III. Fonctions algébriques

Théorème

Soit $y(z)$ une solution de $P(z, y(z)) = 0$, avec $P \in \mathbb{K}[z, y]$ irréductible. Alors $y(z)$ est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}[z]$.

Algorithme. Algèbre linéaire en dimension finie.

Applications

1. Développement de Taylor des fonctions algébriques aux points non-singuliers (optimal).
2. Les langages context-free ont des suites d'énumération qui peuvent se calculer en nombre d'opérations arithmétiques linéaires.

Exemple : nombres de Catalan

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}, \quad C_0 = 1.$$

$$B(z) := \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n.$$

$$B(z) = 1 + zB^2(z)$$

$$\Rightarrow z(1-4z)B'(z) - (1-2z)B(z) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (n+2)C_{n+1} = 2(2n+1)C_n$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Substitution algébrique

Si f est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}[z]$ est g est solution d'un polynôme irréductible $P \in \mathbb{K}[z, y]$, alors $f(g(z))$ est solution d'une équation différentielle à coefficients dans $\mathbb{K}[z]$.

Preuve. Famille génératrice

$$f(g), \quad f'(g)g', \ldots, f^{(i)}(g)g^j.$$

Exemple.

$$\frac{1}{1-z} f\left(\frac{z}{1-z}\right) \to \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f_k.$$

Un exemple en asymptotique

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{\sqrt{z}e^{-\xi}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi[(u-1)(4u^2+4u+1)]}\,dv, \quad \xi = \frac{2}{3}z\sqrt{z}, \quad u = \sqrt{1+\frac{1}{3}v^2}.$$

changement de variable $t^2 = (u-1)(4u^2+4u+1)$:

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{\sqrt{z}e^{-\xi}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi t^2} f(t)\,dt, \quad f(t) = \frac{dv}{dt},$$

$$\mathrm{Ai}(z) \sim \frac{1}{2}\pi^{-1/2} z^{-1/4} e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi^{-n} \frac{2^n}{3^{2n}(2n)!} \frac{\Gamma(3n+1/2)}{\Gamma(1/2)}.$$

Calcul :

1. changement de variable algébrique (résultant) ;
2. récurrence satisfaite par les coefficients
   (algébrique $\rightarrow$ équation différentielle $\rightarrow$ récurrence) ;
3. intégration terme à terme $\rightarrow$ récurrence.