Intégration des fractions rationnelles

Bruno Salvy

INRIA

I. Réduction d'Hermite

II. Partie logarithmique

III. Cas des fractions rationnelles réelles

Décomposition

$$F \in \mathbb{Q}(z), \qquad \int F = ?$$

On récrit F :

$$F = P + \frac{A}{D} + \frac{B}{E},$$

E est sans carré et D n'a que des racines multiples.

$$F = Q' + \left(\frac{\tilde{A}}{\tilde{D}}\right)' + \frac{\tilde{B}}{\tilde{E}}.$$

But : trouver cette décomposition, en évitant les extensions algébriques.

Réduction d'Hermite

$$\frac{P}{Q}, \qquad \deg P < \deg Q, \quad (P,Q)=1$$

Décomposition sans carrés de Q :

$$Q = Q_1 Q_2^2 \cdots Q_m^m = Q_1 (\underbrace{Q_2 Q_3 \cdots Q_m}_{G^\star})(\underbrace{Q_2 Q_3^2 \cdots Q_m^{m-1}}_{G}).$$

On veut récrire

$$\frac{P}{Q} = \left(\frac{A}{G}\right)' + \underbrace{\cdots}_{\text{plus simple}} .$$

$\frac{QG'}{G^2} = Q_1 G^\star G'/G$ polynôme premier avec $G^\star$.

$$\text{Bézout :} \quad P = AQ_1 \frac{G^\star G'}{G} + BG^\star.$$

Donc

$$\frac{P}{Q} = \left(-\frac{A}{G}\right)' + \frac{A'Q_1 + B}{Q_1 G}.$$

La réduction prend m étapes.

Exemple

$$f = \frac{x^7 - 24x^4 - 4x^2 + 8x - 8}{x^8 + 6x^6 + 12x^4 + 8x^2} =: \frac{P}{Q}.$$

$$\begin{aligned} G &= \gcd(Q, Q') = x^5 + 4x^3 + 4x \\ Q_1 G^\star &= Q/G = x^3 + 2x \\ \gcd(G, G') &= x^2 + 2 \\ Q_1 &= (Q_1 G^\star)/(G/\gcd(G, G')) = 1 \\ Q_1 G^\star G'/G &= 5x^2 + 2. \end{aligned}$$

Bézout :

$$P = -(8x^2 + 4)(5x^2 + 2) + (x^4 - 2x^2 + 16x + 4)(x^3 + 2x).$$

$$f = \left(\frac{8x^2 + 4}{x^5 + 4x^3 + 4x}\right)' + \frac{x^4 - 2x^2 + 4}{x^5 + 4x^3 + 4x}.$$

$$\begin{aligned} G &= x^2 + 2 \\ Q_1 G^\star &= x^3 + 2x \\ \gcd(G, G') &= 1 \\ Q_1 &= x \\ Q_1 G^\star G'/G &= 2x^2. \end{aligned}$$

Bézout : $x^4 - 2x^2 + 4 = -3(2x^2) + (x^2+2)(x^2+2).$

$$f = \left(\frac{8x^2+4}{x^5+4x^3+4x} + \frac{3}{x^2+2}\right)' + \frac{1}{x}.$$

Partie logarithmique

Deux remarques

$$\int \frac{5x^4 + 60x^3 + 255x^2 + 450x + 275}{x^5 + 15x^4 + 85x^3 + 225x^2 + 274x + 120} dx$$

$$= \frac{25}{24}\log(x+1) + \frac{5}{6}\log(x+2) + \frac{5}{4}\log(x+3) + \frac{5}{6}\log(x+4) + \frac{25}{24}\log(x+5).$$

ou le log d'un polynôme de degré 120, à coefficients de l'ordre de 10^{68}.

$$\int \frac{dz}{z^2 - 2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \log \frac{z - \sqrt{2}}{z + \sqrt{2}}.$$

La méthode de Rothstein-Trager

Q square-free.

$$f = \frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x - \alpha_i}.$$

1. $a_i = P(\alpha_i)/Q'(\alpha_i)$ est racine de $R = \mathrm{Res}_x(Q, P - tQ') \in \mathbb{Q}[t]$,

2. α_i est racine de $\gcd(Q, P - aQ') \in \mathbb{Q}(a)[x]$,

3. $$\int (P/Q) = \sum_{a \mid R(a)=0} a \log(\gcd(Q, P - aQ'))$$

Exemple

$$\frac{x^4 - 3x^2 + 6}{x^6 - 5x^4 + 5x^2 + 4}$$

$$\mathrm{Res}_x(Q, P - tQ') = 45796(4t^2 + 1)^3.$$

$$\int f = \sum_{a \mid 4a^2+1=0} a \log(x^3 + 2ax^2 - 3x - 4a)$$

$$= \frac{i}{2} \log\left(\frac{x^3 + ix^2 - 3x - 2}{x^3 - ix^2 - 3x + 2}\right).$$

Fractions rationnelles réelles

1. Si $A^2 + B^2 \neq 0$, et $BD - AC = \gcd(A, B)$ (Bézout),

$$i \log \frac{A + iB}{A - iB} = 2 \arctan \frac{AD + BC}{\gcd(A, B)} + i \log \frac{D + iC}{D - iC} + \text{cte}.$$

Et $\deg D < \deg A$, $\deg C < \deg B$.

2. Partant de $\int f = \sum_{a | R(a)=0} a \log(S(a, x))$, on récrit $R(u + iv) = R_1(u, v) + iR_2(u, v)$, $S(u + iv, x) = A(u, v, x) + iB(u, v, x)$ d'où

$$\int f = \sum_{u \in \mathbb{R}, R(u)=0} u \log(S(u, x))$$

$$+ \sum_{\substack{R_1(u,v)=0, \\ R_2(u,v)=0, \\ v>0}} u \log(A^2 + B^2) + v[\arctan(\cdots) + \arctan(\cdots) +$$

Bibliographie

Bronstein (Manuel). – *Symbolic integration. I.* – Springer-Verlag, Berlin, 1997, *Algorithms and Computation in Mathematics*, vol. 1, xiv+299p.

Graham (Ronald L.), Knuth (Donald E.), and Patashnik (Oren). – *Concrete mathematics.* – Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1994, second edition, xiv+657p.

Petkovšek (Marko), Wilf (Herbert S.), and Zeilberger (Doron). – $A = B$. – A. K. Peters, Wellesley, MA, 1996, xii+212p.