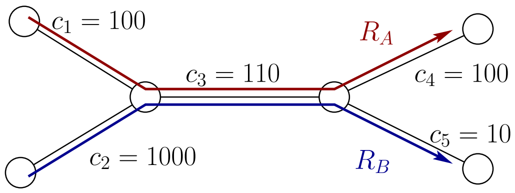
Congestion dans les réseaux

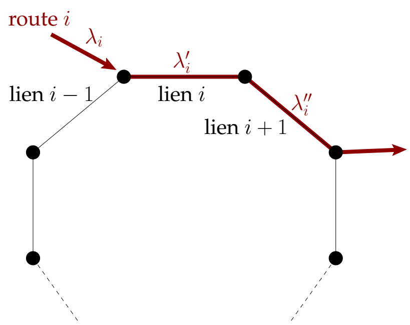
1 Nécessité du contrôle de congestion



On considère un réseau sans contrôle de congestion, où chaque routeur possède une file d'attente FIFO pour les paquets qu'il doit retransmettre. On supposera que la taille cette file d'attente n'est pas bornée. Si deux routes empruntent le même lien et que leur demande excède la capacité de ce lien, chacun se verra attribuer une fraction de la bande passante disponible proportionnelle à sa demande (= le taux auquel il place des paquets dans la file d'attente).

Question 1.1. *Deux routes se partagent les ressources du réseau représenté ci-dessus (les c_i sont les capacités des liens). Calculer le débit attribué à chaque route sur chacun des liens du réseau.*

On considère le réseau en anneau représenté ci-dessous, composé de n machines, reliées par des liens de capacités c_i. Les ressources de communication sont partagées entre n routes définies de la façon suivante : la route i entre par le nœud i, utilise les liens i et $i+1$, et ressort par le nœud $i+2$ (modulo n). On note λ_i le taux d'émission de la source de la route i, λ'_i le taux attribué à cette route sur le lien i et λ''_i celui sur le lien $i+1$.



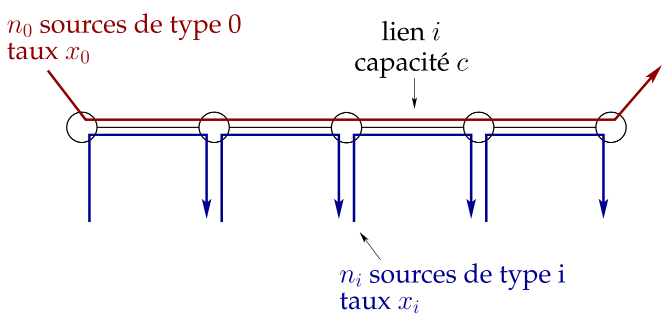
Question 1.2. *Exprimer λ'_i et λ''_i et fonction des autres valeurs.*

Question 1.3. *On se place dans le cas homogène, avec $\lambda_i = \lambda$ et $c_i = c$ pour tout i. Calculer λ'_i et λ''_i en fonction de λ et c. Quel est le comportement du réseau quand la demande λ est grande ?* **NB :** *On pourra utiliser le développement limité $\sqrt{1+u} = 1 + u/2 - u^2/8 + o(u^2)$.*

Pour éviter ce comportement (ainsi que les problèmes de taille de file d'attente), on met en place un contrôle de congestion, qui affecte à chaque route un taux d'émission : chaque source émet au débit qu'on lui a fixé, et non plus à sa capacité maximale.

2 Équité Max-Min (*max-min fairness*)

On considère le réseau linéaire suivant :



Question 2.1. *Quelle allocation maximise le débit total (la somme des débits) ? Est-elle acceptable ?*

Question 2.2. *Quelle solution plus équitable proposez-vous lorsque $n_i = 1$ pour tout i ? Et dans le cas général ?*

On considère un ensemble de liens $l_1 \ldots, l_L$ et un ensemble de routes $r_1, \ldots r_R$. On note $l \in r$ lorsque la route r emprunte le lien l. Une allocation x affecte un taux x_r à chaque route. Une allocation *réalisable* doit vérifier :

$$\forall l, \qquad \sum_{r \ni l} x_r \leqslant c_l$$

Définition 1. Une allocation x est dite *max-min équitable* si et seulement si on ne peut augmenter le taux alloué à une route qu'au prix d'une diminution d'un taux déjà inférieur. Formellement, pour toute autre allocation réalisable y, si $y_r > x_r$ pour une route r, alors il existe une route r' telle que $y_{r'} < x_{r'}$ et $x_{r'} \leqslant x_r$.

Question 2.3. *Donner une allocation max-min équitable pour le réseau linéaire précédent.*

Définition 2. En utilisant le modèle de réseau précédent, on dit qu'un lien l est un **goulet d'étranglement** pour la route r si et seulement si
- le lien l est saturé : $\sum_{r=1}^{R} A_{l,r} x_r = c_l$
- la route r a le taux maximum parmi toutes les routes utilisant ce lien : $x_r \geqslant x_{r'}$ pour tout r' tel que $A_{l,r'} > 0$.

Question 2.4. *Montrer qu'une allocation est max-min équitable si et seulement si chaque route a un goulet d'étranglement.*

Question 2.5. *Montrer qu'il n'existe qu'une seule allocation max-min équitable.*

Question 2.6. *Donner un algorithme calculant la solution max-min équitable.*

3 Généralisation à d'autres formes d'équités

Le débit total obtenu en appliquant l'équité max-min sur le réseau de l'exercice est assez faible en comparaison du débit total qu'on peut obtenir. Pour éviter un tel "gaspillage" de ressources, d'autres formes d'équités ont été définies, qui prennent en compte l'utilisation du réseau par les différentes routes.

On introduit le critère d'équité généralisé de Mo et Walrand :

$$\textsc{Maximize}\ g_\alpha(x) = \sum_r w_r f_\alpha(x_r) \text{ avec } f_\alpha(x) = \begin{cases} \log(x) & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

On donne aussi une définition de l'équité basée sur la comparaison entre une allocation optimale et tout autre allocation réalisable :

Définition 3. Une allocation réalisable x^* est dite (p, α)-proportionnelle si pour toute autre allocation réalisable x, on a :

$$\sum_r w_r \frac{x_r - x_r^*}{(x_r^*)^\alpha} \leqslant 0$$

Question 3.1. *Montrer qu'une solution (p, α)-proportionnelle maximise g_α.*

Deux cas particuliers de cette généralisation sont souvent utilisés :
- le cas $\alpha = 1$ correspond à ce qu'on appelle généralement l'équité proportionnelle (*proportionnal fairness*)
- le cas $\alpha = 2$, appelé minimisation de délai.

Question 3.2. *Pourquoi a-t'on choisi cette appellation pour $\alpha = 2$? Calculer les allocations correspondant à ces deux cas pour l'exemple précédent du réseau linéaire.*

Sources et références

[1] J.-Y. Le Boudec. TCP/IP Networking. http://icawww1.epfl.ch/cn2/0607/.

[2] Laurent Massoulié and James Roberts. Bandwidth sharing and admission control for elastic traffic. *Telecommunication Systems*, 15(1-2) :185–201, 2000.

[3] Jeonghoon Mo and Jean C. Walrand. Fair end-to-end window-based congestion control. *IEEE/ACM Trans. Netw.*, 8(5) :556–567, 2000.