Réseaux d'interconnexion—2

1 Réseaux reconfigurables

Un réseau « butterfly » de dimension r, noté $BUT(r)$, est un réseau composé de $(r+1)2^r$ nœuds organisés en 2^r lignes de $r+1$ niveaux. Un nœud est désigné par une paire (w, i) où w est un entier codé en représentation binaire sur r bits qui numérote la ligne du nœud, et où i numérote le niveau du nœud $(0 \leqslant i \leqslant r)$. Deux nœuds (w, i) et (w', i') sont reliés par un arc si et seulement si $i' = i + 1$ et l'une des deux conditions suivantes est remplie :

- $w = w'$
- w et w' ne diffèrent que par le i-ème bit.

La figure 1, représente $BUT(3)$.

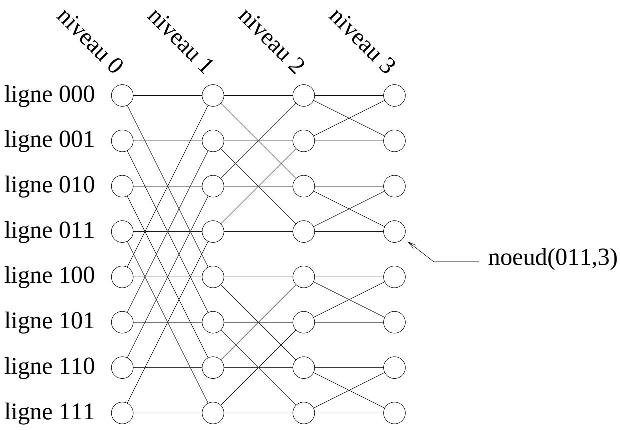

Fig. 1 – $BUT(3)$, le réseau butterfly de dimension 3.

▷ **Question 1** *Quelle est l'architecture du réseau obtenu lorsque l'on regroupe les nœuds d'une même ligne en un seul nœud (et que l'on enlève les arcs redondants) ?*

▷ **Question 2** *Le réseau butterfly a une structure récursive. Donner deux moyens d'obtenir deux réseaux butterfly de dimension $r-1$ à partir d'un réseau butterfly de dimension r.*

▷ **Question 3** *Montrer qu'il existe un unique chemin de longueur r entre un nœud $(w, 0)$ du niveau 0 et un nœud (w', r) du niveau r. Quel est le diamètre de $BUT(r)$?*

Un réseau de Benes de dimension r est composé de deux réseaux butterfly mis « dos à dos ». Les nœuds des niveaux r de chaque butterfly sont fusionnés : chaque niveau comprend alors $2r+1$ nœuds. sur un même niveau. La figure 2 montre un réseau de Benes de dimension 3. On supposera ici que les nœuds du réseau sont uniquement des commutateurs 2×2, pouvant être configurés en croix ou en lignes parallèles pour transmettre les données.

▷ **Question 4** *Montrer (par récurrence sur la dimension r du réseau) que le réseau de Benes peut être configuré pour réaliser une permutation arbitraire : étant donné une permutation quelconque π des 2^{r+1} premiers entiers (de 0 à $2^{r+1}-1$), il existe une configuration des commutateurs qui permet de connecter simultanément l'entrée i du réseau à sa sortie $\pi(i)$. Par exemple, figure 4 est représentée une configuration des commutateurs d'un réseau de Benes de dimension 1 réalisant la permutation $\pi = (0, 1, 2, 3) \rightarrow (3, 1, 2, 0)$.*

2 Réduction sur un Nanneau

On dispose de p fichiers F_i distribués sur un anneau unidirectionnel de p processeurs : P_i possède le fichier F_i, pour $1 \leq i \leq p$ (on pourra par exemple assimiler ces fichiers à des matrices). On dispose d'une loi associative et a priori non commutative sur ces fichiers, notée $\odot$ (ce pourra être l'addition ou la multiplication de matrices). On souhaite calculer la réduction $F_1 \odot F_2 \odot \cdots \odot F_p$, et le résultat pourra se

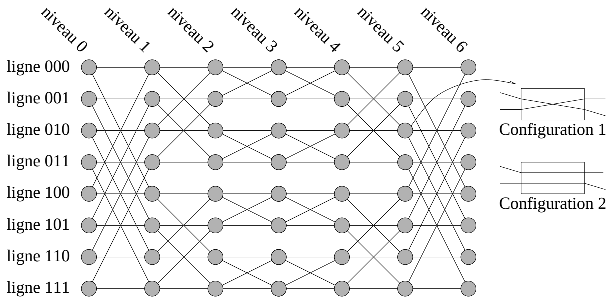

FIG. 2 – Le réseau de Benes de dimension 3

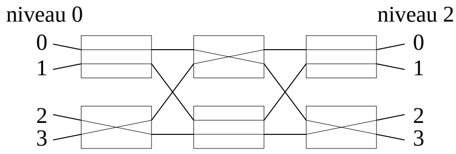

FIG. 3 – Une configuration du réseau de Benes de dimension 1

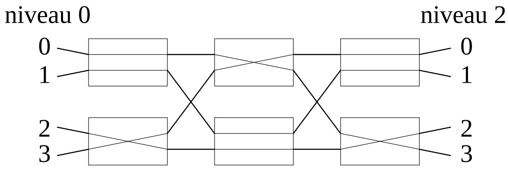

FIG. 4 – Configuration du réseau de Benes de dimension 1.

trouver sur n'importe quel processeur de l'anneau. Le coût de communication d'un fichier sur un lien de l'anneau est c. Le coût de calcul d'une opération $\odot$ est w.

▷ **Question 5** *Dans un premier temps, on suppose que $w \ll c$ (c'est le cas par exemple pour l'addition de matrices). Donner un algorithme réalisant l'opération de réduction sur l'anneau, et calculer sa complexité.*

▷ **Question 6** *On s'intéresse maintenant à une opération $\odot$ telle que $c \ll w$ (c'est le cas par exemple pour la multiplication de matrices). Proposez un algorithme de réduction adapté à ce cas, et donner sa complexité.*

3 Retours aux Nanneaux

3.1 Résolution d'un système triangulaire

On s'intéresse à la résolution du système linéaire $Ax = b$, où A est une matrice triangulaire inférieure d'ordre n et b un vecteur à n composantes. On suppose disposer d'un anneau orienté de p processeurs P_0, P_1, ..., P_{p-1}. On prendra n divisible par p.

▷ **Question 7** *On veut distribuer les colonnes de A aux processeurs. Quelle stratégie adopter ? Donner le schéma d'un algorithme de résolution parallèle adapté à la distribution choisie.*

▷ **Question 8** *On veut maintenant distribuer les lignes de A aux processeurs. Quelle stratégie adopter ? Donner le schéma d'un algorithme de résolution parallèle adapté à la distribution choisie.*

À l'étape i, le processeur responsable de $x[i]$ calcule sa valeur définitive, puis la diffuse aux autres processeurs, qui mettent à jour leurs données. Le lecteur attentif aura remarqué la parfaite similitude entre cet algorithme et celui de la décomposition LU. Toutes les variantes proposées pour cette dernière peuvent être utilisées : recouvrement calcul-communication, pipeline de la diffusion, jusqu'à la technique du *look-ahead* !