DEA Algorithmique 2000/01

Introduction à la complexité

TD 3

1. Donner une réduction (polynomiale ou logarithmique) de SAT (satisfaisabilité des formules booléennes) à CNF-SAT (satisfaisabilité des formules booléennes en forme normale conjonctive).

2. Une formule booléenne de Horn est une conjonction de clauses telle que chaque clause contient au plus une variable positive. (Exemple: $(\bar{x} \vee \bar{z} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{w}) \wedge z) \equiv ((x \wedge z) \rightarrow y) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{w}) \wedge (1 \rightarrow z))$ est une formule de Horn.)

   Montrer que la satisfaisabilité des formules booléennes de Horn est un problème P-complet.

3. Le problème 2-SAT demande si une formule booléenne en forme normale 2-CNF (forme normale conjonctive où chaque clause a au plus 2 literals) est satisfaisable.

   On peut associer à chaque formule 2-CNF ϕ un graphe orienté $G(\phi)$ comme il suit. Les sommets sont les literals (les variables et leurs négations) et pour chaque clause $(\alpha \vee \beta)$ on introduit les arêtes $\bar{\alpha} \rightarrow \beta$ et $\bar{\beta} \rightarrow \alpha$.

   Montrer qu'une formule 2-CNF ϕ n'est pas satisfaisable si et seulement si il existe une variable x telle que $G(\phi)$ contient un chemin de x à $\bar{x}$, ainsi qu'un chemin de $\bar{x}$ à x.

   Déduire que le problème 2-SAT est décidable en temps linéaire (sur une RAM).

4. Montrer que le problème 3-SAT reste NP-complet si chaque variable peut apparaître que au plus 3 fois dans la formule (positivement ou négativement).

5. Le problème MAX-2SAT demande pour une formule booléenne en 2-CNF et un entier k s'il existe une valuation des variables qui satisfait au moins k clauses.

   (a) Soit ϕ la formule en 2-CNF suivante :

   $$x \wedge y \wedge z \wedge w \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{z} \vee \bar{x}) \wedge (x \vee \bar{w}) \wedge (y \vee \bar{w}) \wedge (z \vee \bar{w})$$

   Montrer que toute valuation de x, y, z, w satisfait soit 6, soit 7 clauses de ϕ tel que les valuations qui satisfont 7 clauses sont celles qui rendent la formule $x \vee y \vee z$ vraie.

   (b) Déduire que MAX-2SAT est une problème NP-complet.