DEA Algorithmique 2000/01

Introduction à la complexité

TD 1

1. Une réduction logarithmique de $L \subseteq A^*$ à $K \subseteq B^*$ est une fonction $f : A^* \to B^*$ telle que

   - pour tout $x \in A^*$, $x \in L$ ssi $f(x) \in K$
   - f est calculable en espace logarithmique

   Montrer que les réductions logarithmiques sont transitives.

2. Montrer que les réductions polynomiales sont équivalentes aux réductions logarithmiques si et seulement si $\mathcal{L} = \mathbf{P}$.

   ($\leq_1$ et $\leq_2$ sont des réductions équivalentes ssi pour tous L, K on a $L \leq_1 K$ ssi $L \leq_2 K$.)

3. Pour un graphe orienté G on veut déterminer si G contient des cycles. On suppose que le graphe est presenté par des listes d'adjacence.

   Montrer comment resoudre le problème d'acyclicité en temps linéaire sur une RAM (random access machine).

4. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction. On appelle f *constructible en temps*, s'il existe une MT déterministe qui calcule sur l'entrée 1^n la sortie $1^{f(n)}$ en temps $O(f(n))$. On appelle f *constructible en espace*, s'il existe une MT déterministe qui calcule sur l'entrée 1^n la sortie $1^{s(n)}$ en espace $O(s(n))$.

   - Montrer que si f, g sont constructibles, alors $f + g$, $f \cdot g$ et 2^f sont aussi constructibles.
   - Montrer que $f_1(n) = n$, $f_2(n) = \log(n)$, $f_3(n) = n!$ et $f_4(n) = \sqrt{n}$ sont constructibles.

5. Cet exercice montre le résultat suivant :

   Pour toute fonction t constructible en temps, on a $\mathrm{NTIME}(t) = \mathrm{NTIME}_2(t)$, ou $\mathrm{NTIME}_k(t)$ dénote la classe des langages reconnus en temps t sur une MT non-déterministe à k rubans.

   Soit M une MT non-déterministe qui est bornée en temps par une fonction constructible f. Dans cet exercice on veut simuler M par une MT non-déterministe à deux rubans, qui est bornée en temps par une fonction dans $O(f)$.

   Decrire la simulation en utilisant la notion de protocole d'une MT non-déterministe. Il s'agit de simuler les rubans de M séparement.