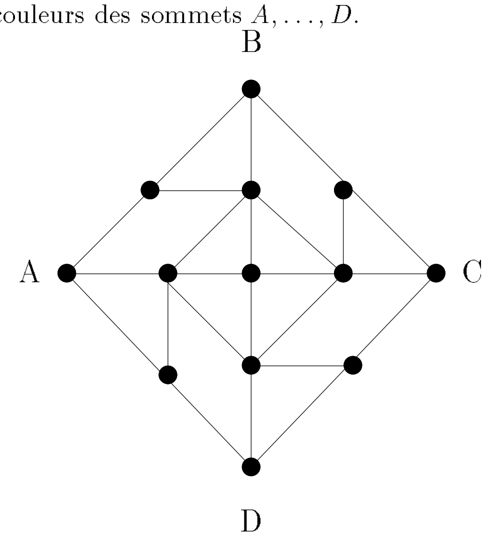
Introduction à la Complexité
DEA Algorithmique 2000/2001

3-Colorabilité

Dans cette question il s'agit de colorier des graphes non-orientés $G = (V, E)$ avec trois couleurs, rouge (r), jaune (j) et bleu (b). Un coloriage $\chi : V \to \{r, j, b\}$ s'appelle *conforme*, si pour toute arête $uv \in E$ on a : $\chi(u) \neq \chi(v)$.

La troisième partie de cette question est indépendante des deux premières.

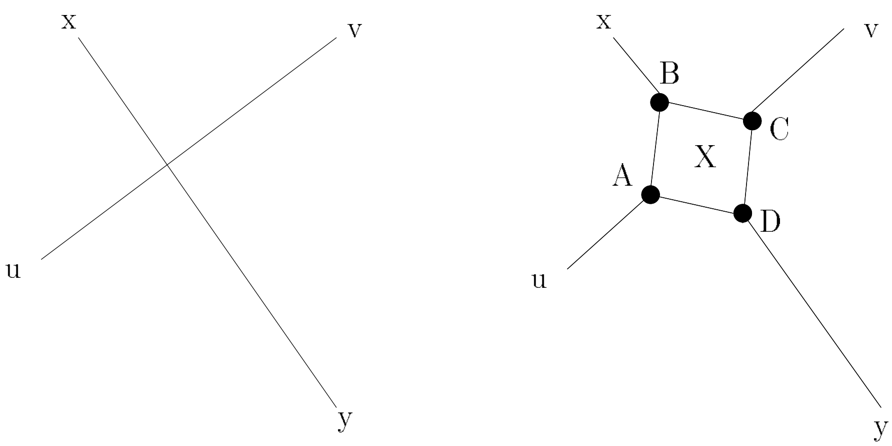
1. Considerer les coloriages conformes du graphe X ci-dessous. Noter par $c_A, \ldots, c_D$ les couleurs des sommets $A, \ldots, D$.



   Quelles sont les combinaisons possibles de $(c_A, \ldots, c_D)$ pour les coloriages conformes de X ?

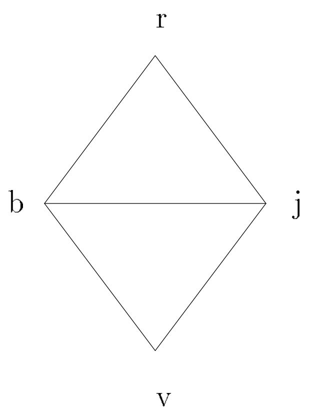
2. Un graphe s'appelle *planaire*, s'il peut être dessiné dans le plan tel que deux arêtes quelconques sont soit disjointes, soit elles s'intersectent dans un sommet commun.

   En utilisant le graphe X on veut construire à partir d'un graphe G un graphe *planaire* G' tel que G est 3-coloriable si et seulement si G' est 3-coloriable. On suppose que G est dessiné dans le plan tel que les arêtes sont des segments droits. Supposons que les arêtes uv et xy, $\{u, v\} \cap \{x, y\} = \emptyset$ ont un point (intérieur) d'intersection. On remplace ce point d'intersection par le graphe X comme il suit :



- Si $\chi : V \rightarrow \{r, j, b\}$ est un coloriage conforme de G, comment doit-on prolonger χ au graphe X, pour obtenir un coloriage conforme du graphe ainsi construit ?
- Montrer qu'un graphe planaire G' peut être construit en temps polynomial à partir de G tel que G est 3-coloriable ssi G' est 3-coloriable. (On peut supposer que les opérations géometriques, telles que le calcul du point d'intersection de deux segments, peuvent être effectuées en temps polynomial.)
  Indication : Assurer que $u = A$ ou $v = C$, ainsi que $x = B$ ou $y = D$.

3. Supposer qu'on dispose d'un algorithme polynomial pour le problème 3-Colorabilité. Construire un algorithme polynomial basé sur l'algorithme donné, qui calcule un coloriage conforme si le graphe donné est 3-coloriable.
   Indication : Dans le graphe ci-dessous, le sommet v doit être colorié avec la même couleur que le sommet r.



Espace logarithmique

1. Etant donnés un graphe dirigé $G = (V, E)$ et deux sommets $s, t \in V$, on veut déterminer s'il existe un chemin *unique* de s à t.

Montrer que le problème est dans NSPACE(log).

2. Etant donnés un graphe dirigé $G = (V, E)$ et deux sommets $s, t \in V$, on veut déterminer s'il existe un chemin de s à t et, si la réponse est «oui», calculer la longueur d'un plus court chemin.
   Decrire un algorithme qui répond à cette question en DSPACE($\log^2(n)$).

Langages de feuilles

Soit M une machine de Turing non-déterministe. Un arbre binaire complet a des noeuds d'arité 0 ou 2 et les feuilles ont la même profondeur. M s'appelle *balancée*, si tout arbre de calcul $T_M(w)$ de M sur w est un arbre binaire complet. En ordonnant les choix possibles dans chaque configuration non-feuille de M (choix 0 et 1), chaque feuille est determinée par le mot de $\{0,1\}^d$ qui correspond aux choix de M. Soit f une fonction calculable en espace logarithmique qui associe à chaque configuration de M un élément d'un ensemble fini F. On définit le *bord* $B_f(M, w) \in F^*$ de $T_M(w)$ comme la suite des étiquettes $f(C)$ des configurations C associées aux feuilles, ordonnées de gauche à droite.

Soit $B \subseteq F^*$. Un langage L appartient à Feuilles(B) s'il existent une MT M balancée de temps polynomial et une fonction d'espace logarithmique f tel que pour toute entrée w :

$$w \in L \quad \Leftrightarrow \quad B_f(M, w) \in B \, .$$

Pour une classe de complexité $\mathcal{C}$ on définit

$$\text{Feuilles}(\mathcal{C}) = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} \text{Feuilles}(B) \, .$$

1. Montrer que Feuilles(B) est fermée par réductions polynomiales, pour tout langage B.
2. **Si vous ne traitez pas la question suivante:**
   Montrer que Feuilles(REG) $\subseteq$ **PSPACE**.
3. Montrer que Feuilles($\cup_{k \geq 1}$DSPACE($\log^k(n)$)) $\subseteq$ **PSPACE**.

L'opérateur booléen NOR est définit par $\text{NOR}(x, y) = \neg(x \vee y)$.

On suppose que la caractérisation suivante de **PSPACE** est connue (conséquence facile des MT alternantes) : Un langage L appartient à **PSPACE** ssi il existe une MT balancée de temps polynomial, qui satisfait la propriété suivante : L'expression booléenne obtenue à partir de $T_M(w)$ en étiquettant chaque noeud interne par NOR et chaque feuille acceptante (rejetante) par 1 (0) est vraie ssi $w \in L$.

Soient $a_1, b, c, d, e, f \in A_5$ les permutations sur 5 éléments :

$$a_1 = (12345) \, , b = (23)(45) \, , c = (12435) \, , d = (243) \, , e = (345) \, , f = (152)$$

On dénote par $a_0 \in A_5$ l'identité de A_5. Pour $x, y \in A_5$ on définit

$$w(x, y) = a_0 b x^4 c y^4 d x e y f \, .$$

On a les égalités suivantes :

$$w(a_0, a_1) = w(a_1, a_0) = w(a_1, a_1) = a_0\,, \quad w(a_0, a_0) = a_1\,.$$

4. Decrire la construction d'une MT balancée M' de temps polynomial pour $L \in \mathbf{PSPACE}$ telle que :

$$B_f(M', w) \in \{c_1 \cdots c_k \in A_5^* \mid \prod_{i=1}^{k} c_i = a_1\} \quad \Leftrightarrow \quad w \in L\,.$$

5. Déduire que $\mathbf{PSPACE}$ = Feuilles(REG).

NP, BPP et RP

Les classes probabilistes RP et BPP ont été définies par des MT probabilistes de temps polynomial. On a $L \in$ BPP si pour tout w :

$$\begin{aligned} w \in L &\quad\Rightarrow\quad \text{Prob}(M \text{ accepte } w) > 2/3 \\ w \notin L &\quad\Rightarrow\quad \text{Prob}(M \text{ accepte } w) < 1/3 \end{aligned}$$

On a $L \in$ RP si pour tout w :

$$\begin{aligned} w \in L &\quad\Rightarrow\quad \text{Prob}(M \text{ accepte } w) > 1/2 \\ w \notin L &\quad\Rightarrow\quad \text{Prob}(M \text{ accepte } w) = 0 \end{aligned}$$

On peut supposer que la valeur $1/3$ dans la définition de BPP peut être remplacée par $1/2^{p(n)}$ pour tout polynôme p.

Montrer que SAT $\in$ BPP implique NP = RP. Utiliser l'algorithme d'auto-réduction de SAT.