

TD n°9

1 Variantes de 3-SAT

Montrer la \mathcal{NP} -complétude des deux variantes de 3-SAT suivantes :

Question 1.1 3-SAT NAE (*not all equal*), où l'on impose que les trois littéraux de chaque clause ne soient pas tous à la même valeur.

Question 1.2 3-SAT OIT (*one in three*), où l'on impose qu'exactement un littéral soit à VRAI dans chaque clause.

2 Encore une variante : SAT- N

On appelle SAT- N le problème SAT restreint aux formules qui n'ont pas plus de N occurrences de la même variable.

Question 2.1 Montrer que SAT-3 est au moins aussi dur que SAT. En déduire que pour tout $N \geq 3$, SAT- N est \mathcal{NP} -complet.

Question 2.2 Soit x une variable apparaissant dans une formule F de SAT-2. Trouver une formule équivalente à F et dans laquelle la variable x n'apparaisse plus. En déduire un algorithme polynomial pour SAT-2.

3 Complexité de SUBSET-SUM

Montrer que le problème suivant SUBSET-SUM est \mathcal{NP} -complet.

SUBSET-SUM

Instance : un ensemble fini S d'entiers positifs et un entier objectif t .

Question : existe-t-il un sous-ensemble $S' \subseteq S$ tel que $\sum_{x \in S'} x = t$?

Indication : vous pouvez par exemple effectuer une réduction à partir de 3-SAT. A partir d'un ensemble de clauses C_0, \dots, C_{m-1} sur les variables x_0, \dots, x_{n-1} , considérer S l'ensemble des entiers $v_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1} b_{ij} 10^j$ et $v'_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1} b'_{ij} 10^j$, $0 \leq i \leq n-1$, où b_{ij} (resp. b'_{ij}) vaut 1 si le littéral x_i (resp. \bar{x}_i) apparaît dans C_j et 0 sinon, et des entiers $s_j = 10^j$ et $s'_j = 2 \cdot 10^j$, $0 \leq j \leq m-1$. Trouver alors un entier objectif t tel qu'il existe un sous-ensemble $S' \subseteq S$ de somme t si et seulement si l'ensemble initial de clauses est satisfiable. Conclure. Quels autres entiers auraient aussi marché ?

4 Sous-chaîne transitive

Dans un graphe orienté, on dit que $\{x_1, \dots, x_k\}$ est une chaîne transitive de longueur k si et seulement si pour tout $1 \leq i < j \leq k$, $(x_i, x_j) \in E$. Montrer que le problème suivant est \mathcal{NP} -complet.

Sous-chaîne transitive :

Instance : Un graphe orienté $D = (V, E)$.

Question : D contient-il une sous-chaîne transitive de longueur au moins $\left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$?

Indication : Vous pouvez par exemple effectuer une réduction à partir de 3-SAT. Si on se donne un ensemble de clauses C_1, \dots, C_k , avec $C_i = (x_i^1 \vee x_i^2 \vee x_i^3)$, on peut construire une instance du problème de sous-chaîne transitive en posant $V = \{C_0\} \cup_{1 \leq i \leq k} \{C_i, x_i^1, x_i^2, x_i^3\}$ et en choisissant avec soin les arêtes à mettre dans E .