Algorithmique II
Année 2006-2007

Florent Bouchez
Jean-François Pineau

TD n°5
Graphes Eulériens

1 Échauffement

Définition 1 *On appelle* cheminement maximal *d'origine x toute chaîne de la forme $\mu = (x, \dots, y)$ telle que toutes les arêtes incidentes à y sont dans μ, i.e. on ne peut plus prolonger la chaîne à partir de y.*

Exercice 1 Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe, dont tous les sommets ont un degré pair. Montrer que tout cheminement maximal est un cycle.

Solution:

Soit $G = (X, E)$ un graphe tel que $\forall x \in X$, $d(x)$ pair. Soit un cycle maximal $\mu = (x, \dots, y)$. Comme μ est maximal, toutes les arêtes de y sont dans μ, donc comme $d(y)$ est pair, y est atteint un nombre pair de fois. Supposons $x \neq y$, alors y est atteint 1 fois pour l'atteindre, et 1 fois pour en sortir.

x_i, y, x_{i+1}	$\leftarrow$ *2 arêtes de y atteintes*
x_{n-1}, x_n, y	$\leftarrow$ *1 arête de y atteinte*
Donc	$2k+1$ *arêtes.*

ce qui contredit l'hypothèse.

Exercice 2 On considère un graphe connexe $G = (X, E)$ et un cycle ν de ce graphe. Montrer que toutes les composantes connexes $C_1, C_2, \dots, C_p$ de $G - \nu$ (on retire les arêtes, pas les sommets) ont chacune un sommet en commun avec ν.

Solution:

Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe et un cycle ν de ce graphe, $\nu = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1)$. Soit $x_0 \in \nu$. Comme le graphe est connexe,

$$\forall\ x \in G, \exists\ \mu \text{ chemin minimal entre } x \text{ et } x_0$$

Soit x' le premier sommet de ν sur μ. Dans $G - \nu$, si $x \in C_i$, x est toujours lié à x' par le début du chemin μ car x' étant le premier sommet de ν sur μ, les premières arêtes sont restées.

2 Tourisme

Un ancien L3If arrive en touriste dans une grande ville. Il a noté toutes les rues qu'il voudrait parcourir avant de partir. Il aimerait passer une et une fois seulement par chacune de ces rues.

Se creusant la mémoire pour retrouver ses anciens cours de graphe, il se souvient que ce dont il a besoin ici est de trouver un cycle *eulérien.*

Flash Back 1 *Un cycle eulérien est un cycle passant une fois et une seule par toutes les arêtes d'un graphe. Un graphe connexe est dit eulérien s'il existe un cycle eulérien.*

Exercice 3 Montrer que G est eulérien si et seulement si $\forall\ x \in X,\ d(x)$ est pair.

Solution:

$\Rightarrow$ *Soit G un graphe connexe, eulérien. Alors, il existe un cycle $\mu = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1)$ passant une fois et une seule par toutes les arêtes. μ peut être considéré comme un cheminement maximal, donc, d'après la démonstration de la question 1, $d(x_1)$ est pair. De même, en regardant le cheminement maximal $(x_2, \ldots, x_n, x_1, x_2)$, on trouve que $d(x_2)$ est pair. En itérant le procédé, on trouve que $\forall\ x \in X,\ d(x)$ pair.*

$\Leftarrow$ *D'après la question 1, il existe un cycle maximal, ν. Considérons la composante connexe C_k de $G - \nu$. Dans cette composante connexe, tous les sommets sont de degré pair :*
- *si $x \in \nu$, $d_{G-\nu}(x) = d_G(x) - 2k$, où k est le nombre d'apparition de x dans ν.*
- *si $x \in \nu$, $d_{G-\nu}(x) = d_G(x)$.*

Récursivement, on obient un cycle eulérien μ dans C_k. On le rajoute à ν grâce à la question 2. On fait de même pour toutes les composantes connexes.

Exercice 4 En déduire un algorithme qui teste si un graphe est eulérien, et construit un cycle eulérien le cas échéant.

Solution: *Principe de l'algorithme :*
- *construire un cheminement maximal*
- *l'enrichir par un autre cheminement maximal ayant un sommet en commun avec le précédent*
- *répéter jusqu'à être passé par toutes les arêtes.*

Vérifier que G est connexe;
calculer le degré de chaque sommet, vérifier qu'ils sont tous pairs;
sélectionner un sommet x quelconque;
$\nu \leftarrow$ cheminiment de x maximal;
tant que ν *ne contient pas toutes les arêtes de* E **faire**
  trouver x dans ν tel que toutes arêtes incidentes à x ne sont pas dans ν;
  $\mu \leftarrow$ cheminement maximal d'origine x;
  $\nu \leftarrow \cup\{x, \nu, \mu\}$;
fin

Exercice 5 Quelle structure de données utiliser afin d'obtenir un algorithme en $O(n + m)$

Solution:

On a besoin d'une copie du graphe, que l'on va détruire au fur et à mesure. On utilisera un tableau de listes représentant tous les voisins de x Γ^+x. Les listes seront doublement chaînées pour pouvoir réaliser les suppressions en temps constant. Comme le graphe est non orienté, l'arête xy sera stocké dans Γ^+x et dans Γ^+y. Lorsqu'on prolonge le cheminement à partir d'un sommet x, on prend le premier y dans la liste Γ^+x et on supprime cet arc (x, y). Ce faisant, il faut aussi supprimer l'arc (y, x). Pour pouvoir le faire en temps constant, il est nécessaire de chaîner les deux occurrences de la même arête entre elles.

Le cycle ν sera représenté par une liste doublement chaînée et un tableau position_nu *pointera sur la première occurence de i dans la liste ν.*

Candidat *sera une liste qui contient les sommets apparaissant dans ν, un sommet n'apparaissant qu'une fois, et* Candidat_bis *sera un tableau de booleen, étant à vrai si et seulement si x est dans la liste* Candidat.

les degrés des sommets sont gérés par un tableau d'entiers

le cheminement μ est représenté par une liste doublement chaînée.

- *Pour construire le cheminement, lorsqu'on considère l'arc (x, y), on supprim (x, y) et (y, x), et on décrémente les degrés de x et y de 1.*
- *Lorsque le cheminement est terminé, on sait l'insérer dans ν grâce à* position_nu.
- *Pour trouver un x dans ν tel que toutes les arêtes incidentes à x ne soient pas dans ν, il suffit de balayer la liste* Candidate *et récupérer le premier x tel que $d(x) > 0$. Globalement, sur l'algorithme, cette liste sera balayée une fois et une seule.*

Exercice 6 Après vérification, notre ancien L3If s'aperçoit que son graphe possède exactement 2 sommets de degré impair. Il ne peut donc pas trouver de cycle eulérien...

- Mais peut-il passer une fois et une seule par chaque arête quand même ?
- Et si il y avait plus de sommets de degré impair ?

Solution:

Définition 2 *On dit qu'un graphe connexe est semi-eulérien s'il existe une chaîne non fermée passant une fois et une seule par chaque arête.*

- *Soit G un graphe connexe, et x_1, x_2 ses 2 seuls sommets de degré impair. Rajoutons l'arête (x_1, x_2) (pas grave si l'arête existe déjà, cela marche aussi pour les multigraphes) à $G' = G \cup (x_1, x_2)$. Alors G' est eulérien, donc il existe un cycle eulérien $(x_1, \ldots, x_2, x_1)$, donc $(x_1, \ldots, x_2)$ est une chaîne non fermée passant une fois et une seule par chaque arête.*
- *S'il existe un chemin passant une fois et une seule par chaque arête $\mu = (x, x_1, \ldots, x_n, y)$, alors d'après les démonstrations précédentes, $d(x_i)$ est pair. Et, si $x \neq y$, alors $d(x)$ et $d(y)$ sont de degré impair.*

Exercice 7

Notre L3IF arrive devant un ancien édifice. Chaque pièce est reliée à une pièce adjacente par une porte possédant une ornementation *magnifique*, il serait dommage de ne pas toutes les emprunter. Chaque pièce possède également une porte de sortie sur chacune de ses façades. Est-ce possible d'emprunter chaque porte une fois et une seule ?

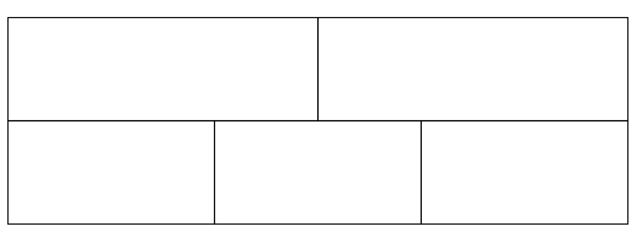

FIG. 1 – Dessine moi un chemin...

Solution: *Non (4 sommets de degré impair)*

3 Mais que fait l'arbitre ?

Un graphe connexe est dit arbitrairement eulérien en x si tout cheminement maximal d'origine x est un cycle eulérien.

Exercice 8 Montrer que G est arbitrairement eulérien en x si et seulement si G est eulérien et tout cycle de G passe par x.

Solution:

$\Leftarrow$ *G est eulérien (trivial). Soit C la composante connexe de x dans $G - \mu$, avec μ un cycle ne passant pas par x. Alors C est eulérien (voir démonstration de la question 3). Soit ν un cycle eulérien de C. ν est un cheminement maximum partant de x dans G, qui n'est pas un cycle eulérien, ce qui est en contradiction avec la question 3.*

$\Rightarrow$ *Soit μ un cheminement maximal d'origine x ; il sature x. Si μ n'est pas eulérien, alors il existe une composante connexe C de $G - \mu$, qui est eulérien, donc qui contient un cycle (eulérien pour C, quelconque pour G) ne passant pas par x.*

Exercice 9 Si F est une forêt où chaque arbre a au moins deux sommets et si x est un sommet n'appartenant pas à F, montrer qu'en joignant par une arête x à tous les sommets de degré impair de F on obtient un graphe arbitrairement eulérien en x. La réciproque est-elle vraie ?

Solution:

$\Leftarrow$ *Tous les sommets de $F \cup x$ sont de degré pair (même x, car il y a un nombre pair de sommets de degré impair), donc le graphe et eulérien. Comme toutes les composantes connexes de F n'ont pas de cycle, tout cycle passe par x...*

$\Rightarrow$ *Soit G un graphe arbitrairement eulérien en x. Comme tout cycle passe par x, les composantes connexes de $G - x$ forment une forêt. De plus, comme tous les sommets sont de degré pair supérieur ou égal à 2, ils ont dans $G - x$ un degré supérieur ou égale à 1. Donc chaque arbre a au moins 2 sommets.*

Notes de fin de TD

On peut remarquer que les résultats des questions 3 et 6 s'étendent sans problème aux multigraphes.