Florent Bouchez
Jean-François Pineau

TD n°10

Recherche de coloriage planaire (enfin, quelque chose comme ça)

1 Coloriage de carte

Un ancien L3IF (que voulez-vous, c'est le fil conducteur...) s'est reconverti dans la Géographie. Il doit mettre au point une carte de l'Europe, avec pour chaque pays une couleur propre, tel que 2 pays voisins n'aient pas la même couleur.

Le problème, c'est qu'il n'a que 6 couleurs à sa disposition.

Il espère pouvoir se sortir d'affaires en utilisant ces vieilles connaissances d'algo. Il imagine chaque pays représenté par un sommet, avec des arêtes entre deux pays frontaliers.

Exercice 1 Avant cela, il a l'intuition de devoir d'abord montrer la formule suivante, due à Euler pour les graphes planaires à n sommets, e arêtes, f faces et k composantes connexes, qui s'exprime :

$$n - e + f = k + 1$$

Solution:

Par récurrence sur le nombre d'arêtes. Si $e = 0$, alors $f = 1$, et $n = k$, la formule est vérifiée. En rajoutant une arête, $(e + 1)$,
- *si cette arête relie 2 sommets d'une même composante connexe, alors on crée un cycle $(f + 1)$*
- *si cette arête relie 2 sommets de 2 composantes connexes différentes, alors on supprime l'une des composantes $(k - 1)$*

Dans tous les cas, la formule est respectée.

Exercice 2

1. Notre L3IF veut compter le nombre frontière communes. D'après lui, il doit en trouver moins de $3n-6$ (n le nombre de pays, $n \geq 3$). A-t'il raison ?

   Solution: *Comme il faut 3 arêtes pour faire une face, et que 1 arête peut servir pour 2 faces, on a $f \leq \frac{2e}{3}$. Donc, d'après la formule d'Euler :*

   $$e = n + f - 2 \leq n + \frac{2e}{3} - 2$$
   $$e \leq 3n - 6$$

   Nostalgiquement, il se souvient que s'il n'y avait pas de triangle dans son graphe des frontières, il y aurait alors moins de $2n - 4$ frontières communes. Savez-vous pourquoi ?

   Solution: *S'il n'y a pas de triangle, il faut au moins 4 arêtes pour faire une face, donc $f \leq \frac{e}{2}$, d'où le résultat.*

2. En déduire qu'il y a au moins un pays entouré par moins de 5 voisins.

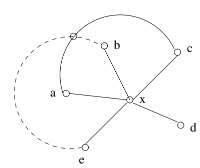
   Solution: *Si tous les sommets sont de degré supérieur à 6, on aurait* $e \geq \frac{6n}{2} = 3n$*, ce qui est en contradiction avec ce qui précède.*

3. Sur ce, il saute de joie, sachant qu'il peut maintenant colorier l'Europe avec ses 6 couleurs différentes. Savez-vous comment ?

   Solution: *On colorie par récurrence sur le nombre de sommets. Si* $n \leq 6$*, on donne une couleur à chaque sommet. Sinon, si* G *est un graphe planaire, alors* $\exists\, x \in X \;/\; d(x) \leq 5$*. Par récurrence,* $G \backslash \{x\}$ *est planaire donc 6-coloriable. On prend alors pour* x *la couleur non prise par ses voisins.*

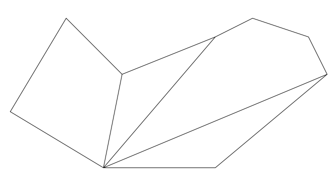
4. Au moment de colorier le premier pays, notre L3IF casse son crayon. Ce dernier est perdu, irrécupérable. Tout est-il foutu pour notre L3IF, sa carrière de géographe aux oubliettes, ou reste-t'il un mince espoir pour colorier l'Europe avec seulement 5 couleurs ?

   Solution: *Le problème se présente lorsque* x *a 5 voisins de couleurs différentes* (a, b, c, d, e)*. On peut alors recolorier les voisins de 4 couleurs différentes. Soient* A *et* C *les composantes connexes de* a *et de* c*, composées uniquement d'éléments ayant la couleur* a *ou la couleur* c*. Alors*
   - *Si* $A \neq C$*, on peut intervertir la couleur de* a *avec la couleur de* c *dans* A*.*
   - *Si* $A = C$*, alors* b *et* e *ne sont pas dans la même composante connexe (car le graphe est planaire), donc on peut intervertir leur couleur dans la composante connexe issue de* b *composée de sommets ayant la couleur de* b *ou de* e*.*



2 Galerie d'Art

N'ayant pas résolu de lui-même la dernière question, notre L3IF arrête ses études de géographie, et se retrouve guide dans une galerie d'art. Il ne peut cependant s'empêcher de remarquer que le plan de la galerie d'art est *extérieur*, c'est à dire que l'une de ses représentations planaires est telle que tous ses sommets sont sur la face externe (voyez vous-même ci-après l'exemple de l'annexe du musée).



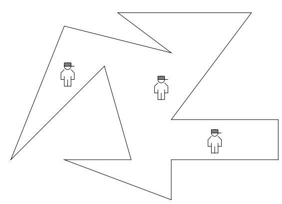
Exercice 3 Montrer que tout graphe planaire extérieur est 3-coloriable.

Solution: *Soit* $G = (X, E)$ *un graphe extérieur. On triangulise* G*, et on colorie à la glouton.*

Exercice 4 La galerie en elle-même forme un polygone simple à n côtés. Pendant les visites, elle est surveillée par $\lfloor n/3 \rfloor$ gardiens. Montrer que si les gardiens sont judicieusement placés, tout point de la galerie est visible par au moins un des gardiens.

si *G est un cycle* **alors**
Faire une 3-coloration à la glouton
sinon
soit C le cycle externe;
soient x, $y \in E$ non voisin dans C et tel que leur distance sur C soit minimale;
(la chaine entre x et y sur C est non vide, et composée de sommets de degré 2);
soit a un tel sommet de degré 2;
soit b et c ses voisins (potentiellement égaux à x ou y);
$X \leftarrow X \backslash \{a\}$;
$E \leftarrow E \backslash \{ab, ac\} \cup \{bc\}$;
Faire une 3-coloration sur le graphe réduit;
Colorier a avec une couleur différente de b et c.
fin

Montrer aussi qu'un architecte vicieux peut toujours construire un batiment nécessitant au moins $\lfloor n/3 \rfloor$ gardiens pour le surveiller.



Solution: *On triangulise le polygone, et on le 3-colorie. On choisit ensuite 1 couleur, puis on place les gardiens sur les sommets de cette couleur. Chaque gardien peut alors surveiller les triangles reliés à son sommet.*

3 Recherche de suspect

Horreur, la galerie a été dévalisée pendant la nuit. Le seul témoin, un gardien, a reconnu le voleur. Malheureusement, il est bègue, et ne parle pas la langue (dommage, hein!!). Pouvez-vous aider ses collègues à retrouvez le coupable?

Exercice 5 Mettez au point un algorithme naïf afin de réduire le bégaiement.

Solution: *Faire un parcours de la chaîne de caractère, en supprimant le caractère courant si le caractère suivant est identique.*

Exercice 6 Cependant, le bégaiement n'est pas aussi simple qu'une répétition de caractère. Si on veut pouvoir retrouver le nom du principal suspect dans la déposition du gardien, il va falloir faire abstraction d'une chaîne de caractère arbitraire entre les caractères recherchés.

Essayez de retrouver le nom du principal suspect, *abbac*, dans la phrase bredouillée par le gardien :

$$cabccbacbacab$$

Pouvez-vous construire un algorithme pour généraliser cette recherche?

Solution: *Regardere le premier caractère du nom du suspect, puis parcourir la phrase, et lorsque le caractère rencontré est identique au caractère du nom, passer au caractère du nom suivant.*

Exercice 7 On a essayé de donner un café bien serré au gardien afin de calmer le bégaiement. La réussite était totale, sauf que maintenant on ne peut plus l'empêcher de débiter une série de chiffres.

On recherche le numéro de matricule du suspect, 31415, parmi les chiffres débités par le gardien :

235902314152673992314256415

Quelle est la complexité de recherche d'un algorithme naïf ?

Vous qui avez fait un TD sur les tables de hachage, pouvez-vous trouver un algorithme meilleur en moyenne ? Appliquez-le au problème.

Solution: *Algo naïf en $O((n-m+1)m)$, avec n la taille de la phrase, et m la taille du motif recherché.*

Table de hachage : application de l'algo de Rabin-Karp.