Arbres

1 Caractérisation et premières propriétés

Remarques.
- Il existe des variations selon que le graphe est orienté ou non, enraciné ou non.
- Définir une racine dans un arbre non orienté définit une orientation naturelle à partir de celle-ci (en suivant les arêtes).

Exemples d'arbres orientés.
- Structure de données : tas binaire.

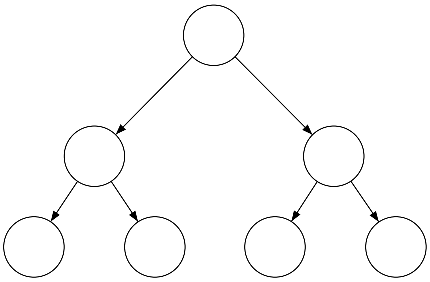

FIG. 1 – Arbre binaire

- Arbres de parcours (BFS ou DFS).

Ici, on se place dans le cas d'arbres non orientés, non enracinés.

Définition 1.1 (arbre)**.** Un graphe $G = (V, E)$ non orienté est un arbre s'il est connexe et sans cycle.

Définition 1.2. Une forêt est un graphe non orienté sans cycle ($\Leftrightarrow$ union de composantes connexes qui sont des arbres).

Caractérisations. ($G = (V, E)$ non orienté, $n = |V|,\ m = |E|$)
Toutes les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. G est connexe et sans cycle.
2. G est sans cycle et $m = n - 1$.
3. G est connexe et $m = n - 1$.

4. G est sans cycle et maximal (pour l'inclusion des arêtes).
5. G est connexe et minimal (pour l'inclusion des arêtes).
6. Deux sommets quelconques de G sont reliés par une unique chaîne élémentaire[1].
7. G peut-être construit à partir d'un singleton en ajoutant une à une des feuilles[2].

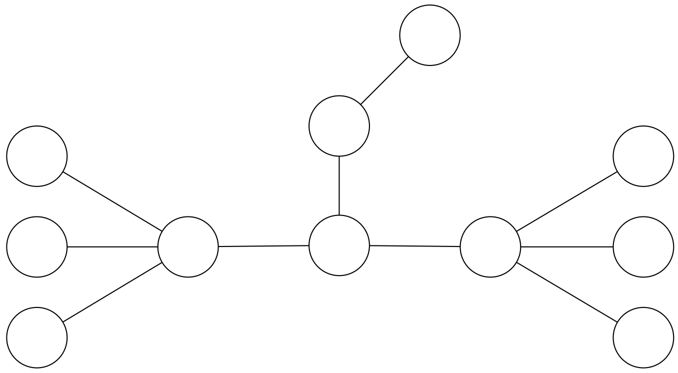

FIG. 2 – Un arbre non orienté et non enraciné

La démonstration de l'équivalence des caractérisations utilise les lemmes suivants :

Lemme 1.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Si G est sans cycle et si $|E| \geq 1$, alors G possède au moins une feuille.*

Lemme 1.2. *Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Si G est connexe et si $m = n - 1$, alors G possède au moins une feuille.*

Démonstration. On considère dans les deux cas un graphe $G = (V, E)$ ayant les propriétés souhaitées.

1. Considérer $\mu = (x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_k)$, $k \geq 1$ car $|E| \geq 1$, une chaîne élémentaire de longueur maximale. Alors x_0 (comme x_k) est une feuille. En effet, sinon $deg(x_0) \geq 2$ donc x_0 a un voisin différent de x_1 :
   - soit il est différent des $x_i,\ 1 \leq i \leq k$ et on pourrait prolonger μ.
   - soit c'est un $x_i,\ 1 \leq i \leq k$ et il y a un cycle.
2. Puisque G est connexe, $\forall\, x \in V,\ deg(x) \geq 1$. Supposons que $\forall\, x \in V,\ deg(x) \geq 2$. Alors $\sum_{x \in V} deg(x) \geq 2n$. Or $\sum_{x \in V} deg(x) = 2m$. Il y a donc contradiction avec le fait que $m = n - 1$.

□

[1] Chaîne ne passant pas deux fois par le même sommet.
[2] Feuille : sommet de degré 1.

Preuve de l'équivalence des caractérisations. On montre les résultats suivants : (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1), (1) $\Leftrightarrow$ (4), (1) $\Leftrightarrow$ (5), (1) $\Leftrightarrow$ (6), (3) $\Leftrightarrow$ (7) .

(1) $\Rightarrow$ (2) : Par récurrence sur n :
- $n = 1$: clair.
- $n \geq 2$: G est connexe et sans cycle, donc en particulier il est sans cycle et contient au moins une arête. D'après le lemme 1.1, il existe une feuille $x \in V$. Considérer le graphe[3] $G - x$: c'est un graphe connexe ($deg(x) = 1$ donc x ne peut pas reconnecter des composantes non connexes) et sans cycle (car sinon il y a également des cycles dans G). Par hypothèse de récurrence, $G - x$ a $n - 1$ sommets et $(n-1)-1 = n-2$ arêtes. Donc G a n sommets et $(n-2)+1 = n-1$ arêtes.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Considérons les composantes connexes $C_1, \ldots, C_k$ de G, avec $\forall\, 1 \leq i \leq k,\ C_i = (V_i, E_i),\ |V_i| = n_i,\ |E_i| = m_i$. Elles vérifient (1) donc (2). Donc $\forall\, 1 \leq i \leq k,\ m_i = n_i - 1$. Donc $m = \sum_i m_i = \sum_i (n_i - 1) = n - k$. Donc $k = 1$, *i.e.* G est connexe.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Récurrence sur n :
- $n = 1$: clair.
- $n \geq 2$: D'après le lemme 1.2, il existe une feuille $x \in V$. Considérons $G - x$: s'il est sans cycle, c'est terminé. Sinon, puisqu'il a $n - 1$ sommets et $m - 1 = (n-1) - 1$ arêtes, par hypothèse de récurrence, il est sans cycle. Donc G est également sans cycle (sinon un cycle devrait passer par x qui est de degré 1, ce qui est impossible).

(1) $\Rightarrow$ (4) : Soit G un graphe sans cycle et connexe, et soient $x \neq y$ deux sommets tels que $xy \notin E$. Comme G est connexe, il existe une chaîne μ reliant x à y dans G. Donc dans le graphe[4] $G + xy$, il existe un cycle composé de cette chaîne prolongée par l'arête xy.

Autre idée : Soit G' un graphe sans cycle contenant G (au sens de l'inclusion des arêtes). Puisque G est connexe, G' l'est également. G' vérifie donc (1). Donc G' a n sommets et $n - 1$ arêtes, comme G. Donc $G' = G$.

(4) $\Rightarrow$ (1) : Soit G sans cycle et maximal. Si G n'est pas connexe, on ajoute une arête entre deux de ses composantes connexes : on ne crée pas de cycle, ce qui est en contradiction avec la maximalité de G.

(1) $\Rightarrow$ (5) : Soit G connexe et sans cycle. Puisque G n'admet pas de cycle, toute arête $xy \in E$ est l'unique chaîne élémentaire allant de x à y. En retirant xy, le graphe n'est donc plus connexe. Donc G est minimal.

(5) $\Rightarrow$ (1) : Par contraposée : soit G connexe. Supposons qu'il contienne un cycle : alors il existe deux sommets x et y reliés par une arête et

[3] $G - x$: Graphe obtenu en supprimant x aux sommets de G ainsi que les arêtes adjacentes à celui-ci.

[4] Graphe obtenu en rajoutant l'arête xy à E.

un chemin. On peut supprimer l'arête xy tout en gardant G connexe. Donc G n'est pas minimal.

(1) ⇒ (6) : Soit G un graphe connexe et $x, y \in V$. Il existe une chaîne élémentaire entre x et y dans G. S'il existait deux chaînes élémentaires entre x et y, il y aurait un cycle dans G. D'où le résultat.

(6) ⇒ (1) : Par contraposée :
- si G n'est pas connexe, il existe deux sommets non reliés par une chaîne élémentaire.
- si G admet un cycle élémentaire $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$, $k \geq 2$, il existe deux chaînes élémentaires entre x_0 et x_1.

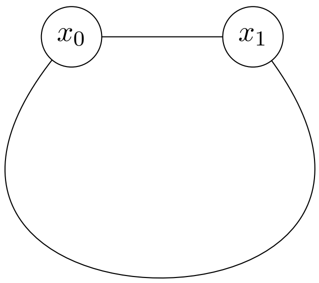

FIG. 3 – Un cycle existe dans G.

(3) ⇔ (7) : (7) implique trivialement (1) donc (3). Montrons la réciproque par récurrence sur n :
- $n = 1$: clair
- $n \geq 2$: Soit G un graphe connexe à n sommets et $m = n - 1$ arêtes. Par le lemme 1.2, on sait qu'il existe une feuille $x \in V$. Le graphe $G - x$ a $n - 1$ sommets et $(n - 1) - 1 = n - 2$ arêtes, donc par hypothèse de récurrence, $G - x$ se construit à partir d'un singleton en rajoutant une à une des feuilles. Il suffit alors de rajouter x pour obtenir G.

□

Reconnaissance.

Entrée : un graphe non orienté $G = (V, E)$ donné par ses listes d'adjacence.

Sortie : G est-il un arbre ?

Algo :
- Faire un parcours (BFS ou DFS) à partir d'un sommet quelconque en comptant et marquant les sommets rencontrés.
- Arrêt en cours de route si on retombe sur un sommet déjà marqué (⇒ il existe un cycle).
- En fin de parcours, vérifier si le nombre de sommets rencontrés est n (connexité).

Complexité : C'est clairement en $\mathcal{O}(n+m)$, mais on a même mieux : si on suit plus de n arêtes, on passe nécessairement deux fois par un même sommet. Le nombre d'arêtes suivies est donc majoré par n et la complexité devient $\mathcal{O}(n)$.

Remarque. Tous les problèmes d'optimisation sont faciles sur les arbres : on passe de problèmes $\mathcal{NP}$-complets sur les graphes à des problèmes de complexité $\mathcal{O}(n)$ voire $\mathcal{O}(1)$ (par exemple, le nombre chromatique[5] χ est toujours égal à 2).

Ou presque : il existe des problèmes $\mathcal{NP}$-complets et également des problèmes ouverts sur les arbres.

Exemple de problème ouvert : les arbres gracieux (graceful trees). Ce sont des arbres tels que :

$$\exists\, f : V \to \{0,\ \ldots,\ n-1\} \text{ vérifiant } \{|f(u)-f(v)|,\ uv \in E\} = \{1,\ \ldots,\ n-1\}$$

La conjecture qui a été faite sur ce problème est que tous les arbres sont gracieux.

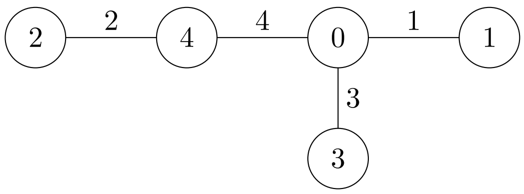

FIG. 4 – Arbre gracieux

Théorème 1.3 (à la "Helly"[6])**.** *Soit T un arbre et $T_1,\ \ldots,\ T_k$ des sous-arbres de T tels que $\forall\, i \neq j,\ T_i \cap T_j \neq \varnothing$ (au sens des sommets). Alors $\bigcap_{1\leq i\leq k} T_i \neq \varnothing$.*

Preuve (contraposée). Supposons que $\bigcap_{1\leq i\leq k} T_i = \varnothing$.

$$\forall\, x \in V,\ \exists\ 1 \leq i_x \leq k,\ x \notin T_{i_x}$$

Considérer la chaîne élémentaire qui relie x à T_{i_x} et marquer la première arête partant de x sur cette chaîne. Le faire pour tous les $x \in V$. Comme il y a n sommets et $n-1$ arêtes dans T, il existe une arête xy qui a été marquée au moins deux fois. Donc T_{i_x} et T_{i_y} sont dans deux composantes connexes distinctes de $T - xy$ (sinon il y aurait un cycle dans T passant par xy). Donc $T_{i_x} \cap T_{i_y} = \varnothing$. Ce qui prouve le résultat. □

[5]Nombre minimum de couleurs nécessaires à la coloration d'un graphe.

[6]Théorème de Helly : Soit $X_1,\ \ldots,\ X_n$ une famille d'ensembles convexes de $\mathbb{R}^d$ (avec $n > d$). Si $\forall\, i_1,\ \ldots,\ i_{d+1}$, les i_j étant tous distincts, $\bigcap_{1\leq j\leq d+1} X_{i_j} \neq \varnothing$, alors $\bigcap_{1\leq i\leq n} X_i \neq \varnothing$. On peut généraliser ce résultat aux familles dénombrables d'ensembles convexes compacts.