Fiche TD 12 - Annales examen 2005

Examen d'algorithmique - 3 heures - 12 janvier 2005

1 Amusettes algorithmiques

Les cinq exercices sont indépendants.

1.1 Pseudo-médiane

Soit E un ensemble à n éléments muni d'une relation d'ordre total, et $\alpha \in]0,1[$. Une α-pseudo-médiane de E est un élément x de E tel qu'il existe au moins n^α éléments de E plus petits que x, et au moins n^α éléments de E plus grands que x.

Question 1 On suppose que n est une puissance de 3. Voila un algorithme récursif pour le calcul d'une α-pseudo-médiane:
- Si $n = 3$, trier les trois valeurs et renvoyer la médiane.
- Sinon, diviser les n éléments en $n/3$ groupes de 3 éléments, prendre la médiane de chaque groupe, et itérer l'algorithme sur les $n/3$ éléments ainsi obtenus.
Montrer que cet algorithme renvoie bien une α-pseudo-médiane, et préciser la valeur de α, et le temps d'exécution (en ordre de grandeur).

Question 2 Au lieu de faire des groupes de 3, on pourrait faire des groupes de 5, 7, ou 9. Laquelle de ces valeurs conduit-elle à l'algorithme le plus efficace?

Question 3 Que dire de l'utilisation d'une pseudo-médiane au lieu d'une médiane pour améliorer le pire cas de TriRapide (QuickSort)?

1.2 Coloriage de graphes

Voila un nouvel algorithme glouton pour colorier un graphe $G = (V, E)$:
- choisir un sommet au hasard et lui allouer la couleur 1; considérer tous les autres sommets du graphe dans un ordre arbitraire, et leur attribuer la couleur 1 si c'est possible
- itérer le processus avec la couleur 2 et les sommets restants

Question 1 Comment implanter cet algorithme? Donner une réponse brève mais précise.

Question 2 Montrer que pour tout graphe, l'algorithme peut conduire au nombre optimal de couleurs.

Question 3 Montrer que l'algorithme peut être arbitrairement mauvais: ce n'est pas une λ-approximation, pour tout $\lambda > 0$.

1.3 Chaîne de produits de matrices

Soit $d \geq 2$ un entier fixé. Proposer un algorithme efficace pour effectuer le produit $M_1 \times M_2 \times M_3 \times \ldots \times M_n$, où chaque M_i est une matrice de taille 1×1, $1 \times d$, $d \times 1$ ou $d \times d$.

1.4 Egalité dans un tableau

Soit $A[1..n]$ un tableau à n éléments entiers. On veut trouver (s'il existe) un indice i tel que $A[i] = i$. Proposer un algorithme efficace pour chacun des cas suivants:
1. On suppose que $0 < A[1] < A[2] < A[3] < \ldots < A[n]$
2. On suppose que $A[1] < A[2] < A[3] < \ldots < A[n]$ (certains $A[i]$ peuvent être négatifs)
3. On ne sait rien sur A

1.5 Mise à jour d'arbre de poids minimal

Soit $G = (V, E, w)$ un graphe pondéré avec des poids positifs ($w(e) \in \mathbb{N}$ pour tout $e \in E$) et T un arbre de poids minimal pour G.
1. On supprime une arête e dans G. Comment reconstruire (si c'est possible) un arbre de poids minimal dans le nouveau graphe $G = (V, E \setminus \{e\}, w)$?
2. On ajoute une arête e dans G, de poids $w(e)$. Comment reconstruire un arbre de poids minimal dans le nouveau graphe $G = (V, E \cup \{e\}, w)$?

2 NP-complétude

Montrer que les problèmes suivants (tous indépendants) sont NP-complets:

Circuit de poids nul Etant donné un graphe orienté pondéré $G = (V, E, w)$, où le poids des arêtes est positif ou négatif ($w(e) \in \mathbb{Z}$ pour tout $e \in E$), déterminer s'il existe un circuit élémentaire de poids nul dans G *(Indication: réduction à partir de 2-PARTITION).*
Arbre couvrant à nombre de feuilles fixé Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un entier K, déterminer s'il existe un arbre couvrant de G ayant exactement K feuilles *(Indication: réduction à partir de HAMILTONIEN).*
Circuit hamiltonien dans un graphe ou dans son complément Etant donné un graphe $G = (V, E)$, déterminer si G ou $\overline{G} = (V, \overline{E})$ contient un circuit hamiltonien. Ici, $\overline{E}$ est l'ensemble des arêtes qui ne sont pas dans E: $(x, y) \in \overline{E} \Leftrightarrow (x \neq y$ et $(x, y) \notin E)$.
Couverture de cycles *(difficile)* Etant donné un graphe $G = (V, E)$ et $K \geq 1$ un entier, déterminer s'il existe un sous-ensemble V' de K sommets tel que tout cycle de G passe par au moins l'un des sommets de V'. *(Indication: attention à la preuve d'appartenance à NP, réduction à partir de VERTEX COVER).*

3 Approximation du MIS (Maximum Independent Set)

Dans un graphe $G = (V, E)$, un *indépendent set (IS)* est un sous-ensemble de sommets V' non reliés par des arêtes (si $u \in V'$ et $v \in V'$, alors $(u, v) \notin E$). Trouver un ensemble indépendant de cardinal maximal (problème MIS) est un problème difficile:

NP-complétude On définit le problème MIS-DEC comme suit: étant donné un graphe $G = (V, E)$ et une borne $K \in \mathbb{N}$, peut-on trouver dans G un IS de cardinal K? Montrer que MIS-DEC est NP-complet

Approximation Si $G = (V, E)$ est donné, on définit le graphe produit GP comme suit: on crée une copie G_u de G pour tout sommet $u \in V$, et on relie les $|V|$ copies ainsi: si $(u, v) \in E$, on relie chaque sommet de G_u à chaque sommet de G_v. Il y a donc $|V|^2$ sommets et $|E|(|V| + |V|^2)$ arêtes dans GP.
1. Montrer que s'il existe un IS de cardinal k dans G, alors il existe un IS de cardinal k^2 dans GP
2. Montrer que s'il existe un IS de cardinal k dans GP, alors il existe un IS de cardinal $\lceil\sqrt{k}\rceil$ dans G
3. Déduire de ce qui précède que s'il existe une λ-approximation pour le problème MIS, ou λ est fixé, alors il existe un PTAS pour MIS. *(Note: en d'autres termes, si on sait approximer MIS pour un certain facteur, alors on sait l'approximer pour tout facteur. En fait, on sait que MIS n'admet aucun facteur d'approximation, comme TSP).*

Algorithme glouton Si $G = (V, E)$ est donné, on calcule un IS à l'aide de l'algorithme suivant:
- prendre un sommet de degré minimum et l'ajouter à la solution
- retirer ce sommet et tous ses voisins du graphe, ainsi que toutes les arêtes qui leur sont adjacentes
- itérer le processus sur le graphe restant.
1. Donner quelques exemples de graphes où cet algorithme renvoie l'optimal
2. Montrer que cet algorithme peut être arbitrairement mauvais
3. *(difficile)* Montrer que cet algorithme renvoie toujours une solution dont le cardinal IS_{alg} vérifie $\frac{IS_{opt}}{IS_{alg}} \leq \frac{|E|}{|V|} + 1$, où IS_{opt} est l'optimal.