

## TD n°2

### 1 Plus grand et deuxième plus grand de $n$ entiers

On s'intéresse dans cet exercice à la **complexité dans le pire des cas et en nombre de comparaisons** des algorithmes.

**Question 1.1** Pour rechercher le plus grand et deuxième plus grand élément de  $n$  entiers, donner un algorithme naïf et sa complexité.

**Question 1.2** Pour améliorer les performances, on se propose d'envisager la solution consistant à calculer le maximum suivant le principe d'un *tournoi* (tournoi de tennis par exemple). Plaçons-nous d'abord dans le cas où il y a  $n = 2^k$  nombres qui s'affrontent dans le tournoi. Comment retrouve-t-on, une fois le tournoi terminé, le deuxième plus grand ? Quelle est la complexité de l'algorithme ? Dans le cas général, comment adapter la méthode pour traiter  $n$  quelconque ?

**Question 1.3** Montrons l'optimalité de cet algorithme en fournissant une borne inférieure sur le nombre de comparaisons à effectuer. Nous utiliserons la méthode des *arbres de décision*.

**1.3.1** Montrer que tout arbre de décision qui calcule le maximum de  $N$  entiers a au moins  $2^{N-1}$  feuilles.

**1.3.2** Montrer que tout arbre binaire de hauteur  $h$  et avec  $f$  feuilles vérifie  $2^h \geq f$ .

**1.3.3** Soit  $A$  un arbre de décision résolvant le problème du plus grand et deuxième plus grand de  $n$  entiers, minorer son nombre de feuilles. En déduire une borne inférieure sur le nombre de comparaisons à effectuer.

### 2 Matrices de Tœplitz

Une *matrice de Tœplitz* est une matrice  $n \times n$  ( $a_{i,j}$ ) telle que  $a_{i,j} = a_{i-1,j-1}$  pour  $2 \leq i, j \leq n$ .

**Question 2.1** La somme de deux matrices de Tœplitz est-elle une matrice de Tœplitz ? Et le produit ?

**Question 2.2** Trouver un moyen d'additionner deux matrices de Tœplitz en  $\mathcal{O}(n)$ .

**Question 2.3** Comment calculer le produit d'une matrice de Tœplitz  $n \times n$  par un vecteur de longueur  $n$  ? Quelle est la complexité de l'algorithme ?