MPRI, Aspects Algorithmiques de la Combinatoire

Epreuve proposée par Robert Cori et Jean-Christophe Novelli

Il est demandé de remettre deux copies: une pour chacun des problèmes

---

Les notes de cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document. Les calculatrices sont interdites.

Problème 1: Permutations triables par pile

On écrira les algorithmes demandés en utilisant un des langages de programmation de votre choix: C, Java, Pascal.

On rappelle que dans une pile les éléments sortent dans l'ordre inverse de leur entrée.

On considère l'algorithme suivant pour une permutation $\alpha = a_1, a_2, \ldots, a_n$ contenue dans un tableau `a[1], a[2], ...,a[n]`:

```
k = 0;
for (i = 1; i <= n ; i++){
    while (k > 0 && P[k] < a[i]) {
            print(P[k]); k--;}
    k++; P[k] = a[i];
}
while (k > 0) {
            print(P[k]); k--;}
```

Ainsi par exemple pour `a` représentant la permutation

$$9, 7, 2, 1, 3, 5, 4, 6, 8$$

la suite des impressions obtenues sont:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

On dira que la permutation α représentée par le tableau `a` est *triable par une pile* si la sortie de l'algorithme est $1, 2, 3, \ldots, n$. Ainsi la permutation donnée plus haut est triable par une pile par contre la permutation $3, 2, 6, 1, 4, 5$ ne l'est pas (la sortie est dans ce cas 2,3,1,4,5,6).

Question 1. Pour $n = 3$ donner toutes les permutations qui sont triables par une pile et celle qui ne l'est pas.

Question 2. Montrer que si $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ est triable par une pile alors $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, n$ et $n, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ le sont.

Question 3. Montrer que si pour une permutation $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on a trois indices $i < j < k$ tels que $a_k < a_i < a_j$ alors la permutation n'est pas triable par une pile.

A toute permutation α triable par une pile on associe un mot $u = \phi(\alpha)$ de longueur $2n$ sur l'alphabet $\{a, b\}$ obtenu de la façon suivante:

On applique l'algorithme donné plus haut et on écrit la lettre a chaque fois que l'on ajoute un élément dans la pile `P` et la lettre b chaque fois que l'on dépile et imprime une valeur. Ainsi pour l'exemple $9, 7, 2, 1, 3, 5, 4, 6, 8$ on obtient le mot:

$$aaaabbabaabbabbabb$$

Question 4. Donner le mot obtenu à partir de la permutation $8, 7, 3, 2, 1, 5, 4, 6, 9$.

Quelle est la permutation β triable par une pile telle que :

$$\phi(\beta) \quad = \quad aaabbabaabbabbaabbab$$

Question 5. Proposer un algorithme qui a partir d'un mot u (supposé obtenu à partir de l'application de l'algorithme à une permutation triable par pile) donne pour résultat la permutation triable par pile α telle que $\phi(\alpha) = u$.

Question 6. Quel est le nombre de permutations triables par une pile sur $1, 2, \ldots n$? Justifiez votre réponse.

Question 7. Donner un algorithme qui construise une permutation triable par une pile par tirage aléatoire uniforme. On utilisera un algorithme décrit dans le cours.

Question 8. On rappelle qu'une montée dans une permutation $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est un couple a_i, a_{i+1} tel que $a_i < a_{i+1}$. Comment lit-on le nombre de montées de α sur le mot $\phi(\alpha)$?

Question 9. Montrer que le nombre de permutations sur $1, 2, \ldots, n$ triables avec une pile ayant p montées est égal à

$$\frac{1}{n-p+1}\frac{n!}{p!(n-p)!}\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$$

Problème 2: Correspondance de Robinson-Schensted-Knuth

1. Calculer les P et Q symboles $\mathrm{P}(w)$ et $\mathrm{Q}(w)$ du mot $w = 34323132421$.
2. Calculer la permutation $\mathrm{Std}(w)$ ainsi que $\mathrm{P}(\mathrm{Std}(w))$.
3. On identifie un tableau avec sa lecture ligne. Que peut-on dire de $\mathrm{Std}(\mathrm{P}(w))$ et de $\mathrm{P}(\mathrm{Std}(w))$? Est-ce vrai quel que soit le mot w ? Pourquoi ?
4. Montrer que, pour tout mot w, on a

$$\mathrm{Q}(w) = \mathrm{Q}(\mathrm{Std}(w)) = P(\mathrm{Std}(w)^{-1}). \tag{1}$$

Il existe une version plus générale de la correspondance de Robinson-Schensted qui remplace les mots par les matrices à coefficients entiers positifs. À chaque matrice $M = (m_{i,j})$ à coefficients entiers positifs, on associe deux mots: la *lecture ligne* $\mathrm{Lig}(M)$ et la *lecture colonne* $\mathrm{Col}(M)$. La lecture ligne est définie comme suit: on parcourt consécutivement les lignes de la matrice de gauche à droite, et pour chaque coefficient $m_{i,j}$ non nul on écrit $m_{i,j}$ fois le numéro j de la colonne. On obtient donc le mot

$$1^{m_{1,1}}2^{m_{1,2}}3^{m_{1,3}}\ldots 1^{m_{2,1}}2^{m_{2,2}}3^{m_{2,3}}\ldots 1^{m_{3,1}}2^{m_{3,2}}3^{m_{3,3}}\ldots \tag{2}$$

où l'on a noté l^k la lettre l répétée k fois.

Par exemple, la lecture ligne de la matrice $M := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est le mot $\mathrm{Lig}(M) = 111331223$. La lecture colonne est définie comme la lecture ligne de la transposée de la matrice. De plus, on appelle standardisée de M la permutation $\mathrm{Std}(M) := \mathrm{Std}(\mathrm{Lig}(M))$. On admet pour l'instant l'identité suivante pour toute matrice M:

$$\mathrm{Std}(\mathrm{Lig}(M)) = \mathrm{Std}(\mathrm{Col}(M))^{-1} \tag{3}$$

5. Calculer $\mathrm{Std}(M)$ et $\mathrm{Std}(\mathrm{Col}(M))^{-1}$, puis vérifier l'identité précédente.

6. En déduire que $\mathrm{P}(\mathrm{Lig}(M))$ et $\mathrm{P}(\mathrm{Col}(M))$ sont deux tableaux semi-standard de même forme.

À chaque matrice, on fait maintenant correspondre le couple de tableaux semi-standard $\mathrm{P}(M)$ et $\mathrm{Q}(M)$ définis par

$$\mathrm{P}(M) := \mathrm{P}(\mathrm{Lig}(M)) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q}(M) := \mathrm{P}(\mathrm{Col}(M))\,. \tag{4}$$

7. Montrer que

$$\mathrm{Q}(\mathrm{Lig}(M)) = \mathrm{Std}(\mathrm{Q}(M)) \text{ et } \mathrm{Q}(\mathrm{Col}(M)) = \mathrm{Std}(\mathrm{P}(M)). \tag{5}$$

8. En déduire que, connaissant $\mathrm{P}(M)$ et $\mathrm{Q}(M)$, il est possible de retrouver les mots $\mathrm{Lig}(M)$ et $\mathrm{Col}(M)$.

9. Montrer qu'il est alors possible de retrouver la matrice M.

On a donc une *bijection* entre les matrices à coefficients entiers positifs et les couples (P, Q) de tableaux semi-standard de même forme. Cette bijection est appelée *correspondance de Robinson-Schensted-Knuth.*

10. Application: Calculer $\mathrm{Lig}(M)$, $\mathrm{Col}(M)$ puis M tels que

$$\mathrm{P}(M) = \begin{array}{|c|c|cc} \cline{1-2} 3 & 3 & & \\ \hline 1 & 2 & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline \end{array} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q}(M) = \begin{array}{|c|c|cc} \cline{1-2} 2 & 2 & & \\ \hline 1 & 1 & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \hline \end{array}$$

11. (Plus difficile) Montrer que l'équation (**??**) est vérifée pour toute matrice M.