Dea Algorithmique

Paradigmes de la combinatoire et de l'algorithmique

Problème d'entraînement 2

Octobre 2002

Problème 1. Permutations et files de priorité

On utilise ici une structure de données T qui représente un ensemble fini d'entiers et sur laquelle on peut effectuer deux opérations ; il s'agit de la procédure `Ajouter`(x, T) qui consiste à remplacer T par $T \cup \{x\}$ et une fonction `DelMin`(T) dont le résultat est le plus petit élément de T qui est en même temps supprimé de T.

Par exemple, à partir d'un T initialisé à l'ensemble vide, la suite d'opérations :

`Ajouter(3,T) ; Ajouter(5,T) ; a = DelMin(T) ; Ajouter(2,T) ; b = DelMin(T) ; Ajouter(6,T) ; c = DelMin(T) ; d = DelMin(T)`

donne pour résultat `a = 3, b= 2, c = 5, d= 6`.

Dans tout le problème on utilise T pour effectuer des transformations d'une permutation $\alpha = a_1, a_2, \ldots, a_n$, en une permutation $\beta = b_1, b_2, \ldots, b_n$, pour cela on utilise les deux procédures `A` et `B` suivantes :

`Procedure A : Ajouter`(a_i, T) `; ++i ;`
`Procedure B :` $b_j =$ `DelMin(T) ; ++j ;`

Dans la suite on considère des mots formés avec des A et des B et qui correspondent à des appels des procédures correspondantes agissant sur des permutations $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ces mots contiennent n lettres A et n lettres B, ils sont tels que le nombre de A est supérieur ou égal au nombre de B dans tout facteur gauche. On peut donc les considérer comme des mots de parenthèses. A l'initialisation, $i = j = 1$, et la structure T est supposée vide.

Ainsi si à la permutation $\alpha = 3, 1, 4, 2$ on applique la séquence d'opérations représentée par le mot : $w = AABABABB$ on obtient comme résultat $\beta = 1, 3, 2, 4$, on note aussi $\beta = w(\alpha)$.

Dans la suite on dit que α est l'entrée et que β est la sortie.

Question 1. a) Quel est le résultat de la séquence w ci-dessus appliquée aux permutations $4, 3, 2, 1$ puis $3, 2, 4, 1$.

b) Donner une séquence de A et de B qui appliquée à une permutation quelconque sur $1, 2, \ldots, n$ donne la permutation identité$1, 2, \ldots, n$.

c) Donner une séquence de A et de B telle que β est égale à α pour toute permutation α.

Question 2. On suppose que α est $3, 2, 1$ quelles sont les valeurs de β possibles lorsqu'on fait varier les séquences w parmi les 5 systèmes de parenthèses ?

Question 3. Comment se comparent le nombre d'inversions de β et le nombre de celles de α ?.

Question 4. On suppose que l'entrée est égale à $n, n-1, \ldots, 2, 1$. Montrer que la sortie est de la forme α, n, β où α et β sont deux suites telles que tout éléement de α est supérieur à tout élément de β. En déduire que le nombre s_n de sorties différentes possibles pour α satisfait la relation de récurrence :

$$s_n = \sum_{p=0}^{n-1} s_p s_{n-1-p}$$

Question 5. On suppose que la sortie β est $2, 3, 1$ quelles sont les entrées α possibles ?

A toute permutation $\beta = b_1, b_2, \ldots, b_n$, on associe la suite $p_1, p_2, \ldots p_n$ donnée par

$$p_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad b_i b_j \text{ pour tout } j < i \\ j & \text{si} \quad j < i, b_j > b_i \text{ et } b_k < b_i \text{ pour les } \; k \text{ tels que } j < k < i \end{cases}$$

Ainsi p_i est le plus grand indice j inférieur à i et tel que $b_j > b_i$ si un tel j existe et est égal à 0 sinon.

Question 6. On peut montrer que les permutations α pour lesquelles la sortie est β sont en nombre :

$$(1 - p_1)(2 - p_2) \ldots (n - p_n)$$

Vérifier que le résultat est satisfait par la permutation β de la question 5. Donner un algorithme qui calcule les p_i en temps n^2.

Question 7. Améliorer l'algorithme précédent en utilisant les valeurs de p_j $j < i$ pour calculer p_i, montrer que l'on peut obtenir un algorithme en temps $O(n)$.

Question 8. (facultatif) Prouver la formule d'énumération de la Question 6.

Problème 2. Factorisation de Catalan

On considère l'alphabet $A = \{a, b\}$, pour un mot f on note $|f|_x$ le nombre d'occurrences de la lettre x dans f. Soit D l'ensemble des mots de parenthèses sur cet alphabet, c'est à dire des mots f tels que $|f|_a = |f|_b$ et $|f'|_a \geq |f'|_b$ pour tout facteur gauche f' de f.

On souhaite d'abord montrer que tout mot f de A^* se decompose de façon unique en un produit

$$f = f_1 b f_2 b \ldots f_p b g_0 a g_1 a \ldots g_{q-1} a g_q$$

où les f_i pour $1 \leq i \leq p$ et les g_j pour $1 \leq j \leq q$ sont des mots de D. On dira alors que le mot est de type (p, q) ; ainsi si $f \in D$, son type est $(0, 0)$.

Question 1. Donner les valeurs de p, q et des mots f_i, g_j, pour les deux mots suivants :

$$bababbaabbbaaababaabab, \quad ababbabaabbababaabaaba$$

Question 2. Donner une preuve de l'existence et de l'unicité de la décomposition en utilisant une récurrence sur la longueur du mot f.

Question 3. Décrire un algorithme qui calcule le type d'un mot et qui fonctionne en $O(|f|)$.

Question 4. Quel est le type de f dans chacun des cas suivants :

1. f est un facteur gauche d'un mot de D
2. f est un facteur droit d'un mot de D
3. f contient autant de a que de b
4. f appartient à b^*a^*
5. f appartient à a^*b^*

Question 5. Montrer, en utilisant les factorisations qu'il existe une bijection entre les mots facteurs gauches de D de longueur $2m$ et les mots de même longueur qui contiennent autant de a que de b. Quel est le nombre de mots de longueur n qui sont facteurs gauches de mots de D ?

Question 6. Montrer qu'il existe une bijection ϕ entre l'ensemble mots de A^* contenant $m+1$ occurrences de a et m occurrences de b et celui des mots contenant m occurrences de a et $m+1$ occurrences de b, bijection qui soit telle que f et $\phi(f)$ diffèrent en une seule position.

Question 7. On dit qu'une suite de mots $f_1, f_2, \ldots, f_k$ forme une chaîne si tous les f_i ont la même longueur et si on passe de f_i à f_{i+1} en chageant une seule occurrence de a en un b. Montrer que l'ensemble des mots de A^* de longueur n peut être décomposé en $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ chaînes. Calculer ces chaînes pour $n = 5$.

Question 8. Déduire de ce qui précède le résultat suivant :

Soit E un ensemble fini contenant n éléments et soit une famille $E_1, E_2, \ldots, E_N$ de sous ensembles de E telle que

$$N > \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

cette famille comporte deux sous-ensembles E_i et E_j distincts satisfaisant $E_i \subset E_j$.