Master Informatique Fondamentale (1ère année)
Algorithmes d'approximation

Partiel

23 novembre 2004

Exercice 1 : Représentant de commerce avec des poids 1 et 2 sur les arêtes

On note TSP$_{\{1,2\}}$ le problème du représentant de commerce restreint aux instances dont la fonction de poids (sur les arêtes) prend ses valeurs dans $\{1,2\}$ uniquement.

Question 1. *Dans l'hypothèse $P \neq NP$, montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il n'existe pas de $(1 + \frac{1}{n} - \epsilon)$-approximation pour TSP$_{\{1,2\}}$.*

Exercice 2 : Petit Steiner

Question 2. *Montrer que si l'on donne en entrée les sommets utilisés par un arbre de Steiner optimal, le problème de l'arbre de Steiner devient polynomial.*

Exercice 3 : MAX-DIRECTED-CUT

Étant donné un graphe G *orienté* muni d'une fonction de poids w sur les arcs, trouver une coupe orienté de poids maximum, i.e., un ensemble $S \subseteq V$ de sommets qui maximise les poids total des arcs *sortants* de S (*i.e.*, des arcs (u, v) tels que $u \in S$ et $v \notin S$).

Question 3. *Proposer (et analyser) une $\frac{1}{4}$-approximation de ce problème. Exhiber une famille d'instances critiques.*

Question 4. *Dérandomiser votre algorithme pour obtenir une $\frac{1}{4}$-approximation déterministe en utilisant la méthode vue en cours. Quelle est la complexité en temps de cet algorithme ? Exhiber une famille d'instances critiques.*

Exercice 4 : Circuits et tournois

Un tournoi est un graphe complet $G = (V, E)$ dont on a orienté chaque arête (i.e., tel que, pour toute paire de sommets $(u, v) \in V^2$, $(u, v) \in E \Leftrightarrow (v, u) \notin E$. Étant donné un tournoi G, le problème de l'*élimination de circuits* est de trouver un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ de taille maximum, tel que le sous-graphe induit par S dans G est sans circuit.

Question 5. *Montrer qu'un tournoi sans circuit de longueur 3 est un tournoi sans circuit.*

On admet qu'il existe une f-approximation du problème SET-COVER restreint aux instances telles que chaque élément de l'univers est contenu dans au plus f ensembles.

Question 6. *Donner une 3-approximation du problème de l'élimination de circuit.*

Exercice 5 : Chemin du représentant de commerce

Étant donné un graphe non-orienté complet muni d'une fonction de poids métrique sur les arêtes, le problème du chemin du *représentant de commerce* est de trouver un *chemin* de longueur minimum, qui passe une fois et une seule par chaque sommet.

Ce problème se décline en trois variantes selon que 0, 1 ou 2 des extrémités du chemin à trouver sont données en entrée.

Question 7. *Proposer (et analyser) une 2-approximation pour les cas où 0 ou 1 extrémité du chemin est imposée en entrée (i.e., (a) le représentant de commerce peut partir de et arriver à n'importe quel sommet ou (b) le représentant de commerce doit partir d'un sommet fixé donné en entrée, mais peut arriver à n'importe quel autre).*

Exhibez une famille d'instances critiques.

Question 8. *Proposer (et analyser) une $3/2$-approximation pour les cas où aucune des extrémités du chemin n'est imposée en entrée.*

Exhibez une famille d'instances critiques.

Exercice 6 : Dérandomisation par la méthode de l'espérance conditionnelle

Question 9. *Soient Y et Z deux variables aléatoires telle que Z est à valeurs dans un ensemble fini B. Montrer que*

$$\max_{z \in B} \mathbb{E}(Y \mid Z = z) \geq \mathbb{E}(X).$$

Nous allons utiliser ce fait pour démontrer qu'on peut dérandomiser un algorithme de type Monte-Carlo en remplaçant chaque tirage de bits aléatoire par le "meilleur choix aléatoire possible" (le z qui maximise $\mathbb{E}(X|Z = z)$ dans la question précédente).

Soit $\mathcal{A}(I, \omega)$ une α-approximation randomisée pour un problème de maximisation Π ($\alpha < 1$), où I est l'instance du problème et $\omega = \omega_1\omega_2 \cdots$ est la chaîne de bits aléatoires. Nous supposons que l'algorithme $\mathcal{A}(I, \omega)$ est de type Monte-Carlo et que son temps de calcul sur l'instance I est borné (uniformément) par un polynôme $p(|I|)$, indépendamment de la chaîne de bits aléatoires.

Soit I une instance fixée. On note X la variable aléatoire représentant la valeur de la solution (aléatoire) renvoyée par l'algorithme sur l'instance I.

On suppose que, pour tout q et pour toute suite binaire $b_1 \dots b_q$, on sait *calculer exactement en temps polynomial* les espérances conditionnelles :

$$\mathbb{E}(X \mid \omega_q = b_q, \dots, \omega_1 = b_1)$$

i.e. l'espérance conditionnelle de la valeur de la solution renvoyée par l'algorithme, sachant que les valeurs des q premiers bits aléatoires sont $b_1, \dots, b_q$.

Étant données des constantes $b_1, \dots, b_q \in \{0, 1\}$, soit $b_{q+1} \in \{0, 1\}$ le bit qui maximise :

$$\mathbb{E}(X \mid \omega_{q+1} = b_{q+1}, \omega_q = b_q, \dots, \omega_1 = b_1).$$

Remarquez qu'étant donnés $b_1, \dots, b_q$ fixés, b_{q+1} se calcule en temps polynomial.

Question 10. *Montrer que*

$$\mathbb{E}(X|\omega_{q+1} = b_{q+1}, \omega_q = b_q, \dots, \omega_1 = b_1) \geq \mathbb{E}(X).$$

Indication : on pourra procéder par récurrence.

Le principe de cette dérandomisation est de construire gloutonnement la chaîne de bits aléatoire au fur et à mesure de l'exécution de l'algorithme randomisé. Quand l'algorithme demande à lire le q-ème bit aléatoire, on fait gloutonnement pour b_q le meilleur choix aléatoire possible sachant les valeurs qu'on a déjà choisies pour $b_1, \ldots, b_{q-1}$.

Question 11. *Décrire précisément l'algorithme déterministe glouton ainsi obtenu et démontrer que si $\mathcal{A}$ est une α-approximation (randomisée) du problème Π, alors l'algorithme obtenu est une α-approximation (déterministe) de Π.*

On se propose à présent d'appliquer cette méthode au problème MAX-CUT.

Étant donné un graphe G muni d'une fonction de poids w sur les arêtes, le problème MAX-CUT est de trouver un ensemble de sommets S tel que le poids total des arêtes ayant une unique extrémité dans S est maximum. On considère l'algorithme randomisé vu en cours pour le problème MAX-CUT :

$S_0 \leftarrow \varnothing$
Numéroter les sommets : $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$
Pour $i = 1$ à n faire
    Si $\omega_i = 1$ alors $S_{i+1} \leftarrow S_i \cup \{v_i\}$
Fin pour
Renvoyer S_n

On utilise à partir d'ici les notations générales définies précédemment pour cet algorithme particulier.

Question 12. *Étant données des constantes $b_1, \ldots, b_q \in \{0, 1\}$, démontrer qu'on peut calculer en temps polynomial :*

$$\mathbb{E}(X \mid \omega_q = b_q, \ldots, \omega_1 = b_1).$$

Indication : Exprimez $\mathbb{E}(X \mid \omega_q = b_q, \ldots, \omega_1 = b_1)$ en fonction des relations des arêtes avec les deux côtés de la coupe déjà construits.

Question 13. *En déduire (et analyser) une $1/2$-approximation gloutonne déterministe du problème MAX-CUT. Reformuler cet algorithme sous une forme naturelle.*

♣