MIM2 - Algorithmes d'approximation- TD 10
Emmanuelle Lebhar
elebhar@ens-lyon.fr - Bureau 317

Arrondi LP et couverture par ensembles
1er Décembre 2003

Exercice 1 (Un algorithme d'arrondi simple)

1. Etant donné la relaxation LP de la couverture par ensemble :

$$\begin{array}{lll} \text{minimiser} & \displaystyle\sum_{s \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\ \text{sous les contraintes} & \displaystyle\sum_{S : e \in S} x_S \geq 1, & e \in U \\ & x_S \geq 0, & S \in \mathcal{S} \end{array}$$

   Proposez une façon très simple de convertir une solution de cette relaxation en solution entière.

2. Considérons maintenant la méthode suivante : 1) calculer une solution optimale de la relaxation LP, 2) sélectionner tous les ensembles S tels que $x_S \geq 1/f$ dans cette solution, où f est la fréquence maximale d'un élément.
   Montrez que cet algorithme est une f-approximation pour le problème de la couverture par ensembles.
3. Déduisez une approximation pour la couverture par sommets.
4. Proposez une famille d'instances cristiques (pour la couverture par ensembles).

Exercice 2 (Arrondi aléatoire)

Une idée naturelle pour arrondir une solution optimale fractionnaire est d'interpréter les fractions comme des probabilités, et de tirer à pile-ou-face suivant ces probabilités pour arrondir la solution.

1. Soit $\mathbf{p}$, une solution optimale de la relaxation linéaire. Chaque $S \in \mathcal{S}$ est sélectionné avec probabilité p_S, la variable associée à S dans $\mathbf{p}$. Notons $\mathcal{C}$, l'ensemble des ensembles sélectionnés.
   Que vaut l'espérance du coût de $\mathcal{C}$?
2. Minorez la probabilité qu'un élément $a \in U$ soit couvert par $\mathcal{C}$ par une constante.

3. Montrez que l'union de $c \log n$ couvertures choisies indépendamment constitue une couverture valide avec probabilité constante.
4. Montrez que l'union de $c \log n$ couvertures choisies indépendamment a un coût inférieur à $\mathrm{OPT}_f \cdot 4 \log n$ avec probabilité constante.
5. Montrez que ces deux évenements se produisent en même temps avec probabilité constante et que l'espérance du nombre d'éxécution de cet algorithme est borné.

Exercice 3 (Solutions demi-entières de la couverture par sommets)

On considère le problème de la couverture par sommets. Tout sommet $u \in V$ est muni d'un poids $c(u) \in \mathbb{Q}^+$.

1. Proposer un programme linéaire pour ce problème, et donnez sa relaxation LP.
2. une *solution extrémale* (en anglais : extreme point solution) d'un ensemble de contraintes linéaires est une solution réalisable, qu'on ne peut pas écrire comme la combinaison convexe de deux solutions réalisables distinctes. Une solution de la relaxation LP précédente est dite *demi-entière* si ses variables sont à valeurs dans $\{0, 1/2, 1\}$.
   Nous allons montrer que toute solution extrémale de cette relaxation est demi-entière. On suppose par l'absurde qu'il existe une solution extrémale $\mathbf{x}$ qui n'est pas demi-entière.
   Construisez deux solutions réalisables $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ dont $\mathbf{x}$ est une combinaison convexe.
   Indication : partitionner en deux ensembles V_+ et V_-, l'ensemble des sommets auquels $\mathbf{x}$ n'attribue pas une solution demi-entière, selon qu'ils appartiennent à $]0, 1/2[$ ou à $]1/2, 1[$.
3. Proposez une 2-approximation au problème de la couverture par sommets pondérée.