MIM2 - Algorithmes d'approximation- TD 5
Emmanuelle Lebhar
elebhar@ens-lyon.fr - Bureau 317

Coupe-circuits de sommets
20 Octobre 2003

Note : l'ensemble des exercices de ce TD forme un tout.

On étudie le problème suivant : Étant donné un graphe non-orienté $G = (V, E)$ muni d'une fonction de poids w positive sur les sommets, trouver un sous-ensemble de V de poids minimum dont le retrait de G engendre un graphe acyclique. Ce sous-ensemble est un *coupe-circuit* de poids minimum.

Espace des cycles : Donnons-nous un ordre arbitraire sur les arêtes de G. Nous associons à chaque cycle simple C de G, un *vecteur caractéristique* : il s'agit du vecteur de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$, $m = |E|$, dont le i-ème coordonnée vaut 1 ou 0 suivant si la i-ème arête de E appartient à C ou non respectivement. L'*espace des cycles de G*est le sous-espace de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$ engendré par les vecteurs caractéristiques des cycles simples de G. La dimension de cet espace est appelé le *nombre cyclomatique de G*, noté $\mathrm{cyc}(G)$.

Exercice 1 (Nombre cyclomatique)

1. Montrer que pour calculer le nombre cyclomatique de G, on peut supposer G connexe.
2. Soit T un arbre couvrant de G. Nous associons à chaque arête e qui n'est pas dans T, son *cycle fondamental* : l'unique cycle présent dans $T \cup \{e\}$.
   Déduisez-en une famille libre de l'espace des cycles.
3. Chaque arête e de T définit une *coupe fondamentale*, $(S, \overline{S})$ de G, $S \subset V$, (S et $\overline{S}$ sont les deux composantes connexes engendrées en ôtant e de T).
   Définissez les vecteurs caractéristiques d'une coupe fondamentale. Déduisez-en une famille libre orthogonale à l'espace des cycles.
4. Montrer que $\mathrm{cyc}(G) = |E| - |V| + 1$.
5. Notons $\delta_G(v)$ la variation du nombre cyclomatique du graphe au retrait d'un sommet v. Le retrait d'un coupe-circuits de sommets $F = \{v_1, \ldots, v_f\}$ annule le nombre cyclomatique de G, ainsi :
   $$\mathrm{cyc}(G) = \sum_{i=1}^{f} \delta_{G_{i-1}}(v_i),$$
   avec $G_0 = G$ et, pour $i > 0$, $G_i = G - \{v_1, \ldots, v_i\}$.
   Exprimez $\delta_G(v)$ en fonction de $\deg_G(v)$, et $\mathrm{comps}(G - v)$ le nombre de composantes connexes engendrées par le retrait de v dans G.

6. Montrez que pour tout sous-graphe H de G, $\delta_H(v) \leq \delta_G(v)$. En déduire une majoration de $\mathrm{cyc}(G)$.

Exercice 2 (Algorithme glouton)
Un algorithme glouton naturel pour trouver un coupe-circuits de sommets consiste à sélectionner et ôter itérativement le sommet de meilleur coût efficace, i.e., le sommet v qui minimise $w(v)/\delta_H(v)$ (où H est le graphe courant) jusqu'à ce que tous les cycles aient disparu.

1. Donnez des exemples démontrant que cet algorithme n'est pas une approximation à un facteur constant.
2. Quel est le facteur d'approximation garanti par cet algorithme ?

Exercice 3 (Fonction de poids cyclomatique)
Nous dirons qu'une fonction de poids est *cyclomatique* s'il existe une constante $c > 0$ telle que le poids de chaque sommet v vaille $c \cdot \delta_G(v)$. i F est un coupe-circuits minimal de sommets de G

1. Montrez que si F est un coupe-circuits minimal de sommets de G, alors
$$\sum_{v \in F} \delta_G(v) \leq 2 \cdot \mathrm{cyc}(G).$$
Indications : on pourra différencier les t composantes connexes rattachées à un unique point de F des $k-t$ autres. Pour majorer la somme des degrés des sommets de F, on pourra étudier le cardinal de la coupe $(F, V\text{-}F)$.
2. En déduire une 2-approximation lorsque la fonction de poids est cyclomatique.
3. Proposez une instance critique.

Exercice 4 (Approximation par le mille-feuilles)
On applique la méthode du mille feuilles en "éfeuillant" selon une fonction de poids cyclomatique.

1. Définissez la fonction de poids résiduelle.

   Soit V' l'ensemble des sommets de poids résiduels non-nuls , et G' le sous-graphe de G induit par V'.

   Cette opération élémentaire permet de décomposer G en une suite de sous-graphes induits décroissante, jusqu'à ce qu'un graphe acyclique soit obtenu (en calculant à chaque fois la plus grande fonction de poids cyclomatique sous la fonction de poids résiduelle courante). Notons $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_k$cette suite de graphes, avec G_k acyclique ; G_i est le sous-graphe de G induit par un ensemble de sommets V_i, avec $V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_k$. Notons t_i, $i = 0, \ldots, k-1$, la fonction de poids cyclomatique définie sur G_i. $w_0 = w$ est la fonction de poids résiduelle sur G_0, t_0 est la plus grande fonction de poids cyclomatique sous w_0, $w_1 = w_0 - t_0$ est la fonction de poids résiduelle sur G_1, ainsi de suite. Et w_k est la fonction de poids résiduelle sur G_k. Posons $t_k = w_k$ pour simplifier les notations. Le poids d'un sommet v se décompose en $t_0, t_1, \ldots, t_k$, donc $\sum_{i:\, v \in V_i} t_i(v) = w(v)$.

2. Soit H un sous-graphe de $G = (V, E)$ induit par $V' \subset V$. Soient F un coupe-circuits minimal de sommets pour H, et $F' \subseteq V - V'$ un ensemble minimal tel que $F \cup F'$ soit un coupe-circuits pour G. Montrez que $F \cup F'$ est un coupe-circuits minimal de G.
3. On considère l'algorithme suivant :

   1 Décomposition

   $H \leftarrow G$, $w' \leftarrow w$, $i \leftarrow 0$

   Tant que H n'est pas acyclique,

   $c \leftarrow \min_{u \in H} \left\{ \frac{w'(u)}{\delta_H(u)} \right\}$

   $G_i \leftarrow H$, $t_i \leftarrow c \cdot \delta_{G_i}$, $w' \leftarrow w' - t_i$

   $H \leftarrow$ le sous-graphe de G_i induit par les sommets u tels que $w'(u) > 0$

   $i \leftarrow i + 1$.

   $k \leftarrow i$, $G_k \leftarrow H$

   2 Augmentation

   $F_k \leftarrow \emptyset$

   Pour $i = k, \ldots, 1$, calculer en un coupe-circuits F_{i-1} de G_{i-1} en augmentant F_i d'un ensemble minimal de sommets choisis dans $V_{i-1} - V_i$.

   3 Retourner F_0.

   Montrez que c'est une 2-approximation pour le problème du coupe-circuits minimum de sommets.